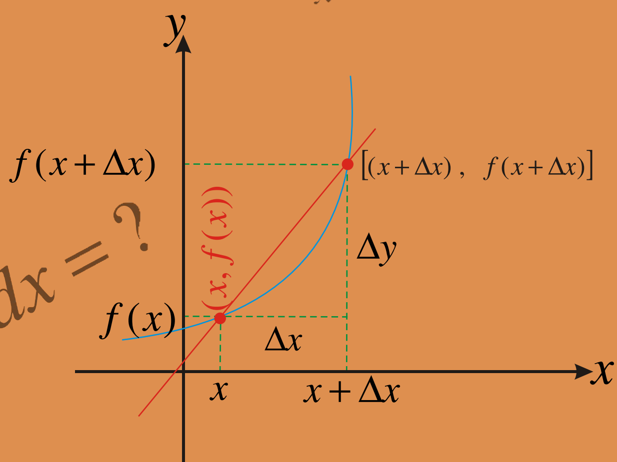
وزارت معارف

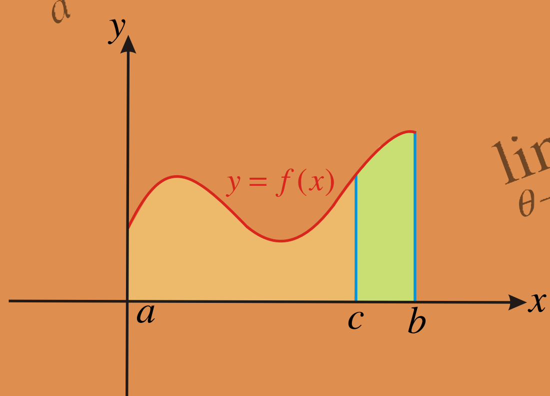
ریاضی

صنف ۱۲

$$\lim_{x\to a} f(x) = ?$$



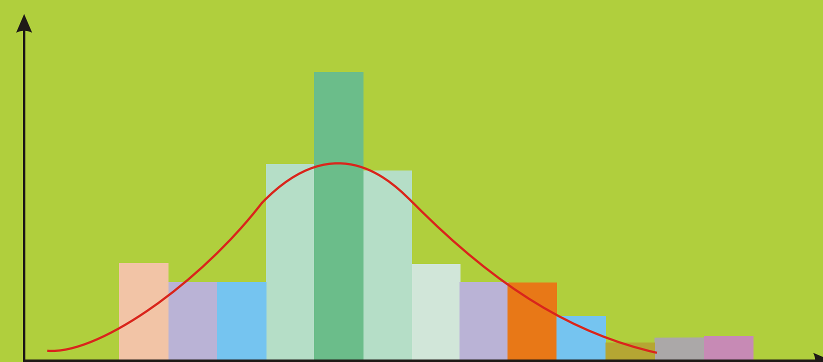
$$\int_a^b f(x)\,dx = ?$$



$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = ?$$

سال چاپ : ۱۳۹۸

ریاضی صنف ۱۲



سرود ملی

دا وطن افغانستان دی
دا عزت د هر افغان دی
کور د سولې کور د تورې
هر بچی یې قهرمان دی
دا وطن د ټولو کور دی
د بلوڅو د ازبکو
د پښتون او هزاره وو
د ترکمنو د تاجکو
ورسره عرب، گوجر دي
پامیریان، نورستانیان
براهوي دي، قزلباش دي
هم ایماق، هم پشه یان
دا هیواد به تل ځلیږي
لکه لمر پر شنه آسمان
په سینه کې د آسیا به
لکه زړه وي جاویدان
نوم د حق مو دی رهبر
وایو الله اکبر وایو الله اکبر

بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت معارف

ریاضی

صنف ۱۲

سال چاپ: ۱۳۹۸ هـ. ش.

مشخصات کتاب

مضمون: ریاضی

مؤلفان: گروه مؤلفان کتاب‌های درسی دیپارتمنت ریاضی

ویراستاران: اعضای دیپارتمنت ویراستاری و ایدیت زبان دری

صنف: دوازدهم

زبان متن: دری

انکشاف دهنده: ریاست عمومی انکشاف نصاب تعلیمی و تألیف کتب درسی

ناشر: ریاست ارتباط و آگاهی عامهٔ وزارت معارف

سال چاپ: ۱۳۹۸ هجری شمسی

مکان چاپ: کابل

چاپ‌خانه:

ایمیل آدرس: curriculum@moe.gov.af

پیام وزیر معارف

اقرأ باسم ربک

سپاس و حمد بی‌کران آفریدگار یکتایی را که بر ما هستی بخشید و مارا از نعمت بزرگ خواندن و نوشتن برخوردار ساخت، و درود بی‌پایان بر رسول خاتم- حضرت محمد مصطفی ﷺ- که نخستین پیام الهی بر ایشان "خواندن" است.

چنانچه بر همه‌گان هویداست، سال ۱۳۹۷ خورشیدی، به نام سال معارف مسمی گردید. بدین ملحوظ نظام تعلیم و تربیت در کشور عزیز ما شاهد تحولات و تغییرات بنیادینی در عرصه‌های مختلف خواهد بود؛ معلم، متعلم، کتاب، مکتب، اداره و شوراهای والدین، از عناصر شش‌گانه و اساسی نظام معارف افغانستان به شمار می‌روند که در توسعه و انکشاف آموزش و پرورش کشور نقش مهمی را ایفا می‌نمایند. درچنین برهه سرنوشت‌ساز، رهبری و خانواده بزرگ معارف افغانستان، متعهد به ایجاد تحول بنیادی در روند رشد و توسعه نظام معاصر تعلیم و تربیت کشور می‌باشد.

از همین‌رو، اصلاح و انکشاف نصاب تعلیمی از اولویت‌های مهم وزارت معارف پنداشته می‌شود. در همین راستا، توجه به کیفیت، محتوا و فرایند توزیع کتاب‌های درسی در مکاتب، مدارس و سایر نهادهای تعلیمی دولتی و خصوصی در صدر برنامه‌های وزارت معارف قرار دارد. ما باور داریم، بدون داشتن کتاب درسی باکیفیت، به اهداف پایدار تعلیمی در کشور دست نخواهیم یافت.

برای دستیابی به اهداف ذکرشده و نیل به یک نظام آموزشی کارآمد، از آموزگاران و مدرسان دلسوز و مدیران فرهیخته به‌عنوان تربیت‌کننده‌گان نسل آینده، در سراسر کشور احترامانه تقاضا می‌گردد تا در روند آموزش این کتاب درسی و انتقال محتوای آن به فرزندان عزیز ما، از هر نوع تلاشی دریغ نورزیده و در تربیت و پرورش نسل فعال و آگاه با ارزش‌های دینی، ملی و تفکر انتقادی بکوشند. هر روز علاوه بر تجدید تعهد و حس مسؤولیت-پذیری، با این نیت تدریس را آغاز کنند، که در آینده نزدیک شاگردان عزیز، شهروندان موثر، متمدن و معماران افغانستان توسعه‌یافته و شکوفا خواهند شد.

همچنین از دانش‌آموزان خوب و دوست‌داشتنی به‌مثابه ارزشمندترین سرمایه‌های فردای کشور می‌خواهم تا از فرصت‌ها غافل نبوده و در کمال ادب، احترام و البته کنجکاوی علمی از درس معلمان گرامی استفاده بهتر کنند و خوشه‌چین دانش و علم استادان گرامی خود باشند.

در پایان، از تمام کارشناسان آموزشی، دانشمندان تعلیم و تربیت و همکاران فنی بخش نصاب تعلیمی کشور که در تهیه و تدوین این کتاب درسی مجدانه شبانه روز تلاش نمودند، ابراز قدردانی کرده و از بارگاه الهی برای آن‌ها در این راه مقدس و انسان‌ساز موفقیت استدعا دارم.

باآرزوی دستیابی به یک نظام معارف معیاری و توسعه‌یافته، و نیل به یک افغانستان آباد و مترقی دارای شهروندان آزاد، آگاه و مرفه.

دکتور محمد میرویس بلخی

وزیر معارف

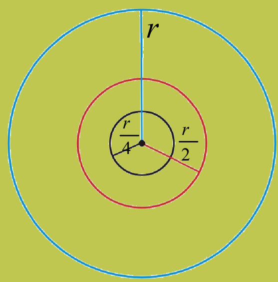
فهرست

عنوان | **صفحه**

فصل اول
لیمت

مفهوم لیمت

از یک نقطهٔ مستقر (O) یک مستوی سه دایره به ترتیب با شعاع r , $\frac{r}{2}$, $\frac{r}{4}$ رسم کنید. چند مرتبه این عملیه را ادامه داده می‌توانید؟



فعالیت

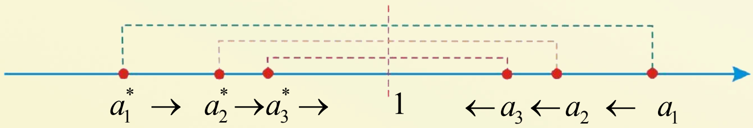
ترادف‌های $a_n = (1+\frac{1}{n})$ و $a_n^* = (1-\frac{1}{n})$ را برای $n \in IN$ در نظر بگیرید و فعالیت زیر را انجام دهید:

- موقعیت a_1 , $a^*{}_1$ را روی محور اعداد نشان دهید.
- آیا a_2 و $a^*{}_2$ داخل و یا خارج فاصله a_1 و $a^*{}_1$ قرار دارد؟
- با توجه به مراحل فوق بگویید که موقعیت نقاط a_3 و $a^*{}_3$ روی محور اعداد کجا است.
- با گرفتن یک قیمت بزرگ n, a_n و a_n^* به کدام قیمت نزدیک می‌شود.

از فعالیت فوق، نتیجهٔ زیر را نوشته کرده می‌توانیم:

در شکل زیر دیده می‌شود که با ازدیاد n از طرف راست ترادف a_n به قیمت 1 و همچنان از طرف چپ ترادف a_n^* نیز به قیمت 1 نزدیک می‌شود، یعنی:

ترادف a_n وقتی‌که n به بی‌نهایت تقرب کند، به عدد یک از طرف راست نزدیک می‌شود و همچنان a_n^* وقتی‌که n به بی‌نهایت تقرب کند، به عدد یک از طرف چپ نزدیک می‌شود.



برای اینکه مفهوم لیمت را خوب توضیح داده باشیم، در مرحلهٔ اول با توجه به گراف، چند ترادف را تحت مطالعه قرار می‌دهیم:

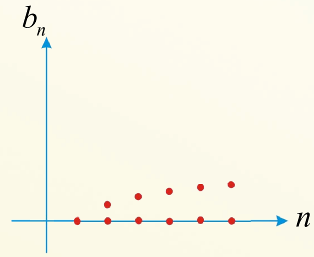
مثال: ترادف‌های داده شدهٔ زیر برای بزرگ‌ترین قیمتn، به کدام عدد تقرب می‌نماید. موضوع را به شکل گرافیکی تشریح کنید در صورتی‌که:

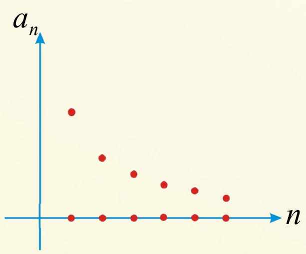
$$a_n=\left(\frac{2n+3}{n}\right)\ \dots (i) \qquad b_n=\left(\frac{n-1}{n}\right)\ \dots (ii) \qquad c_n=(-1)^n\frac{1}{n}\ \dots (iii)$$

حل: می‌دانیم که برای قیمت‌های مختلف n نمایش گرافیکی ترادف‌ها طور زیر می‌باشد:

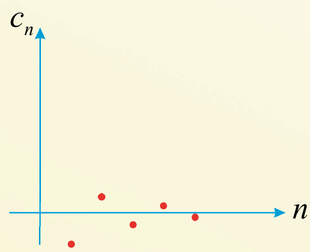
n	1 , 2 , 3 , 4 , 5 , $\to\infty$
b_n	$0\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{2}{3}\ ,\ \frac{3}{4}\ ,\ \frac{4}{5}\ ,\ \to 1$

n	1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , $\to\infty$
a_n	$5\ ,\ \frac{7}{2}\ ,\ 3\ ,\ \frac{11}{4}\ ,\ \frac{13}{5}\ ,\ \frac{15}{6}\ ,\ \frac{17}{7}\ ,\ \to 2$





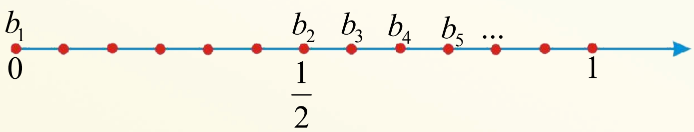
n	1 , 2 , 3 , 4 , 5 , $\to\infty$
c_n	$-1\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ -\frac{1}{3}\ ,\ \frac{1}{4}\ ,\ -\frac{1}{5}\ ,\ \to 0$



درگراف‌های فوق دیده می‌شود که با ازدیاد قیمت‌های n، قیمت ترادف‌ها به یک عدد معین نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود؛ مانند ترادف a_n که به عدد (2)، ترادف b_n به عدد (1) و ترادف c_n به صفر تقرب می‌کنند. با دادن قیمت‌های بسیار بزرگ به n موضوع به آسانی واضح می‌شود، ازجدول قیمت‌های ترادف به ملاحظه می‌رسد، در موجودیت لیمت، ترادف به یک قیمت معین نزدیک می‌شود که لیمت(limit) نامیده می‌شود.

برای این کار ترادف $b_n = \dfrac{n-1}{n}$ را در نظر می گیریم بنابرین داریم که:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
b_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{10}{11}$	...



اگــر تــرادف‌هــای اعــداد I .... $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}$ ، $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots, \frac{n+1}{n}$ .... II و (III) .... $2, 4, 6, \dots, 2n$ را در نظر بگیریم، به مشاهده می‌رسد در صورتی که n به‌طرف بی-نهایت نزدیک شود؛ ترادف I به‌طرف صفر، ترادف II به‌طرف یک و ترادف III بـه‌طـرف (∞) نزیک می گردد.

تقرب متحول: گفته می‌شود که متحول x به عدد معین a تقـرب مـی کنـد، در صـورتی کـه x حسب دلخوا به a نزدیک شده بتوانـد؛ یعنـی تفـاوت بـین x و a از هـر عـدد کوچـک $(\delta > 0)$ کوچکتر گردد، مفهوم فوق طور سمبولیک به عبارت‌های معادل زیر افاده می گردد.

$\forall \delta > 0 : |x - a| < \delta$ یا $x \to a$ یا $|x - a| \to 0$

تقرب متحول از راست $(x \to a^+)$**:** یک ترادف متناقص به قیمـت‌هـای x اسـت کـه بـه گونـهٔ تدریجی حسب دلخوا به a نزدیک می‌شوند، چنانچه:

$x: a + 0.1,\ a + 0.01\ ,\ a + 0.001\ ,\ a + 0.0001\ ,\ \dots \to a^+$

تقرب متحول از چپ $(x \to a^-)$**:** یک ترادف متزاید به قیمت‌های x است طوری که بـه گونـهٔ تدریجی حسب دلخوا به a نزدیک شوند، چنانچه:

$x: a - 0.1,\ a - 0.01\ ,\ a - 0.001\ ,\ a - 0.0001\ ,\ \dots \to a^-$

بنابراین، تقرب متحول x به عدد a معادل است با تقرب از دو سمت(راست و چپ)؛ یعنی:

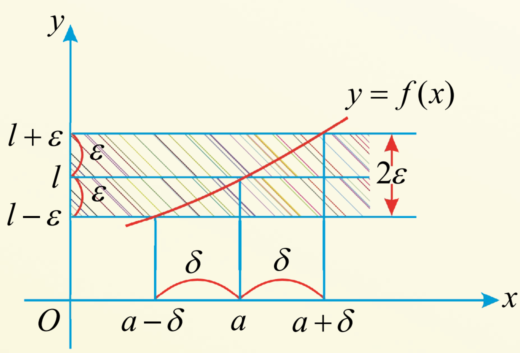
$x \to a \iff (x \to a^+\ ,\ x \to a^-)$

مثال: متحول x را به عدد 9 تقرب دهید، به عبارت دیگر مفهوم $x \to 9$ را توضیح دهید.

حل:

$$x: 9.1 \ , \ 9.01 \ , \ 9.001 \ , \ 9.0001 \ , \ \ldots \ \to 9^{+}$$
$$x: 8.9 \ , \ 8.99 \ , \ 8.999 \ , \ 8.9999 \ , \ \ldots \to 9^{-}$$

تعریف: هرگاه تابع $f(x)$ در یک انتروال باز که عدد a شامل آن است، تعریف شده باشد(ولوکه در a غیر قابل تعریف باشد) و با تقرب متحول x به a، $f(x)$ حسب دلخواه به عدد l نزدیک شود گفته می‌شود که لیمت تابع $f(x)$ عبارت از l است زمانی‌که x به a تقرب کند و می‌نویسند که: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ یا $\begin{array}{l} x \to a \\ f(x) \to l \end{array}$



$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ : |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \ |f(x) - l| < \varepsilon$$
$$\lim_{x \to a} f(x) = l \ \Leftrightarrow \quad (|x - a| \to 0 \Rightarrow \ |f(x) - l| \to 0)$$

تمرین

در تابع $f(x) = 2x$ به صورت گرافیکی نشان دهید که اگر x به‌طرف عدد 3 تقرب کند، $f(x)$ به عدد 6 تقرب می کند.

لیمت طرف راست و طرف چپ

به شکل مقابل توجه نموده و بگویید که از کدام دو طرف به درخت نزدیک می‌شویید؟

فعالیت

- در جدول زیر برای تابع $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$, $x\neq 1$ بعضی از قیمت‌ها درج گردیده است:

x	0.98	0.99	0.999	?	1.001	1.01	1.02
$f(x)$	1.98	1.99	1.999	?	2.001	2.01	2.02

$$\longrightarrow \qquad \longleftarrow$$

- گراف تابع را رسم نمایید.
- هرگاه x به عدد (1) تقرب کند، $f(x)$ به کدام عدد تقرب می‌کند؟

از فعالیت فوق نتیجهٔ زیر به دست می‌آید:

لیمت طرف راست: تابع $f(x)$ در عدد a دارای لیمت راست l_1 است؛ اگر برای هر $\varepsilon>0$، عدد کوچک $\delta>0$ وجود داشته باشد طوری که $x\in(a,a+\delta)\Rightarrow f(x)\in(l_1-\varepsilon,l_1+\varepsilon)$ یا

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=l_1$$

لیمت طرف چپ: تابع $f(x)$ در a دارای لیمت چپ l_2 است؛ اگر برای هر $\varepsilon>0$ یک عدد $\delta>0$ وجود داشته باشد طوری که $x\in(a-\delta,a)\Rightarrow f(x)\in(l_2-\varepsilon,l_2+\varepsilon)$ یا

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=l_2$$

تابع $f(x)$ وقتی که $x\to a$ دارای لیمت l می‌باشد؛ یعنی: $\lim_{x\to a} f(x)=l$ به شرطی که:

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=l=\lim_{x\to a^+} f(x)$$

مثال: نشان دهید که $\lim_{x\to3} f(x) = \lim_{x\to3} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$ است.

حل: لیمت‌های دست راست و دست چپ را مطالعه می کنیم.

x	3.5	3.1	3.01	3.001	....	3^+
$f(x)$	6.5	6.1	6.01	6.001	....	6

$$\Rightarrow \lim_{x\to3^+} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$$

x	2.5	2.9	2.99	2.999	....	3^-
$f(x)$	5.5	5.9	5.99	5.999	....	6

$$\Rightarrow \lim_{x\to3^-} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$$

در بالا دیده می‌شود که لیمت‌های دست راست و دست چپ باهم مساوی اند، بنابرین $\lim_{x\to3} = \frac{x^2-9}{x-3} = 6$ است.

طریقهٔ دوم: فرض می کنیم برای عدد کوچک اختیاری $\varepsilon > 0$ یک عدد $\delta > 0$ وجود داشته باشد، طوری که:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \ |x-a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x)-l| < \varepsilon$$

$$|x-3| < \delta \ \Rightarrow \left| \frac{x^2-9}{x-3} - 6 \right| = \left| \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} - 6 \right| = |x+3-6| = |x-3| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \delta$$

در رابطهٔ فوق دیده می‌شود که ε با δ رابطه دارد؛ یعنی اگر به ε قیمت دهیم، δ قیمت می‌گیرد و اگر به δ قیمت دهیم، ε قیمت می‌گیرد؛ بنابرین تعریفی که برای لیمت موجود است صحت دارد؛ یعنی: $\lim_{x\to3} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$ است.

تمرین

نشان دهید که تابع $f(x) = \frac{|x-2|}{x-2}$ وقتی که $x \to 2$ تقرب نماید، لیمت ندارد؟

خواص لیمت(*Properties of limit*)

آیا هر دو طرف لیمت‌های مساوات مقابل در نقطهٔ $x \to -1$ با هم مساوی اند یا خیر؟

$$\lim_{x\to -1}(x^2 \pm x) = \lim_{x\to -1} x^2 \pm \lim_{x\to -1} x$$

فعالیت

برای اجرای این فعالیت، پاسخ سوال‌های زیر را ارایه کنید:

- اگر x به عدد(2) نزدیک شود، لیمت تابع $f(x) = x + 2$ چند خواهد بود؟
- اگر x به 3 تقرب کند $(x \to 3)$، لیمت تابع $g(x) = 2x$ را دریافت کنید.
- $\lim_{x\to 2} f(x) \pm \lim_{x\to 2} g(x)$ را دریافت کنید.
- $\lim_{x\to 2} f(x) \cdot \lim_{x\to 2} g(x)$ را دریافت کنید.
- $\lim_{x\to 2} f(x) \div \lim_{x\to 2} g(x)$ را دریافت کنید.

از فعالیت فوق، نتیجهٔ زیر را می‌توانیم به‌دست آوریم:

اگر $\lim_{x\to a} f(x) = A$ و $\lim_{x\to a} g(x) = B$ باشد:

1) $\lim_{x\to a} Kf(x) = K \lim_{x\to a} f(x) = KA$

2) $\lim_{x\to a}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = A \pm B$

3) $\lim_{x\to a}\left[f(x) \cdot g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = A \cdot B$

4) $\lim_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \dfrac{A}{B}\ ,\ \lim_{x\to a} g(x) = B \neq 0$

5) $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{A}\ ,\ \lim_{x\to a} f(x) = A \geq 0$

از جمله خواص فوق تنها سه خاصیت را ثبوت می‌نماییم و خواص متباقی را به شکل کارخانه‌گی به شاگردان می گذاریم.

توابع بی‌نهایت کوچک: تابع $\varepsilon(x)$ در $x \to a$ بی‌نهایت کوچک نامیده می‌شود، هرگاه $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ باشد:

1- برای اینکه $\lim_{x\to a} f(x)=b$ باشد، لازم و کافی است که $f(x)$ به شکل مجموع عدد ثابت b و تابع بی‌نهایت کوچک $\varepsilon(x)$ در $x\to a$ ارائه شده بتواند؛ یعنی:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=b+\varepsilon(x) \\ \lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x)=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x)=b$$

2- اگر $\varepsilon(x)$ در $x\to a$ بی‌نهایت کوچک باشد که صفر نگردد، پس $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{\varepsilon(x)}=\infty$ مجموع توابع بی-نهایت کوچک، باز هم یک تابع بی‌نهایت کوچک است.

3- حاصل ضرب توابع بی‌نهایت کوچک، یک تابع بی‌نهایت کوچک می‌باشد.

4- هرگاه $\varepsilon(x)$ بی‌نهایت کوچک و $u(x)$ تابعی باشد که لیمت آن صفر شده نتواند، پس تابع $v(x)=\dfrac{\varepsilon(x)}{u(x)}$ یک تابع بی‌نهایت کوچک است.

مثال:

I) تابع $\varepsilon(x)=x^2-9$ در $x\to 3$ بی‌نهایت کوچک است؛ زیرا: $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-9)=0$

II) تابع $\varepsilon(x)=\dfrac{1}{2x}$ در $x\to\infty$ بی‌نهایت کوچک می‌باشد.

$$\lim_{x\to\infty}\varepsilon(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x}=0$$

سؤال‌ها: با استفاده از خواص قبلی حل کنید.

1) $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2-1)=\lim\limits_{x\to 2}2x^2-\lim\limits_{x\to 2}1=2\lim\limits_{x\to 2}x^2-\lim\limits_{x\to 2}1=2\cdot 2^2-1=7$

2) $\lim\limits_{x\to -3}(x-1)^2=\lim\limits_{x\to -3}(x-1)\cdot\lim\limits_{x\to -3}(x-1)=(-4)(-4)=16$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x-3}{x+1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}4x-\lim\limits_{x\to 0}3}{\lim\limits_{x\to 0}x+\lim\limits_{x\to 0}1}=\dfrac{0-3}{0+1}=-3$

از حل سؤال‌های فوق سه خاصیت لیمیت را به طور زیر بیان و ثبوت می‌نماییم:

1- لیمیت حاصل جمع چند تابع مساوی است با مجموع لیمیت‌های توابع مذکور؛ یعنی اگر $f(x_2)$ و $f(x_1)$ توابع باشند، پس داریم:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)+f(x_2)\right]=\lim_{x\to a}f(x_1)+\lim_{x\to a}f(x_2)$$

ثبوت: اگر $\lim\limits_{x\to a}f(x_1)=b_1$ و $\lim\limits_{x\to a}f(x_2)=b_2$ باشد؛ پس داریم که:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\pm f(x_2)\right]=b_1\pm b_2$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1)=b_1+\varepsilon_1 \quad .....\ I \\ f(x_2)=b_2+\varepsilon_2 \quad .....\ II \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_1)\pm f(x_2)=(b_1+\varepsilon_1)\pm(b_2+\varepsilon_2)=b_1\pm b_2+(\varepsilon_1\pm\varepsilon_2)$$

چون ($\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2$) مجموعه و تفاضل دو تابع بی‌نهایت کوچک است و می‌دانیم که مجموع و تفاضل دو تابع بی‌نهایت کوچک باز هم یک تابع بی‌نهایت کوچک است؛ پس لیمت آن صفر می‌باشد.

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\pm f(x_2)\right]=b_1\pm b_2=\lim_{x\to a}f(x_1)\pm\lim_{x\to a}f(x_2)$$

2- لیمت حاصل ضرب دو و یا چند تابع مساوی است با حاصل ضرب لیمت‌های هر یک آن‌ها:

ثبوت:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\cdot f(x_2)\right]=\lim_{x\to a}f(x_1)\cdot\lim_{x\to a}f(x_2)=b_1\cdot b_2$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1)=b_1+\varepsilon_1 \\ f(x_2)=b_2+\varepsilon_2 \end{array}\right\}\Rightarrow\ f(x_1)\cdot f(x_2)=(b_1+\varepsilon_1)(b_2+\varepsilon_2)$$

$$f(x_1)\cdot f(x_2)=b_1\cdot b_2+b_1\cdot\varepsilon_2+b_2\cdot\varepsilon_1+\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2$$

چون ε_1 و ε_2 اعداد بی‌نهایت کوچک ولی مثبت اند، حاصل ضرب آنها نیز یک تابع بی‌نهایت کوچک است و لیمت آن صفر می‌باشد؛ یعنی: مجموعهٔ $b_1\cdot\varepsilon_2+b_2\cdot\varepsilon_1+\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2$ به طرف صفر تقرب می کند.

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\cdot f(x_2)\right]=b_1\cdot b_2$$

3- لیمت حاصل تقسیم دوتابع عبارت است از نسبت لیمت‌های هریک از توابع:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\frac{b_1}{b_2}\qquad,\quad g(x)=b_2\neq 0$$

ثبوت:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=b_1+\varepsilon_1 \\ g(x)=b_2+\varepsilon_2 \end{array}\right\}\ \Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}$$

از هر دو طرف مساوات بالا $\frac{b_1}{b_2}$ را تفریق می کنیم:

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}-\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_2(b_1+\varepsilon_1)-b_1(b_2+\varepsilon_2)}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$

$$=\frac{b_2b_1+b_2\varepsilon_1-b_1b_2-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_1)}$$

$$\Rightarrow\ \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}+\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2+b_1b_2+b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$

$$=\frac{b_2(b_1+\varepsilon_1)}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}\quad\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}$$

چون ε_1 و ε_2 اعداد بی‌نهایت کوچک ولی مثبت اند و اگر $x \to a$ تقرب کند، حاصل تقسیم آنها باز هم کوچک می گردد بنابرین لیمت آن صفر می گردد:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\frac{b_1}{b_2}$$

قضیهٔ ساندویچ: هرگاه توابع $f(x), g(x)$ و $h(x)$ برای هر x از یک انتروال باز که عدد a را در بر دارد (ولو برای $x \neq a$)، شرط $f(x) \le g(x) \le h(x)$ را صدق کند، در صورتی که $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b=\lim\limits_{x\to a} h(x)$ باشد؛ $\lim\limits_{x\to a} g(x)=b$ است.

مثال: اگر $u(x)$ تابع دارای خاصیت $(1-\frac{x^2}{4} \le u(x) \le 1+\frac{x^2}{2})$ باشد $\lim\limits_{x\to a} u(x)$ را مشخص کنید؟

حل: واضح دیده می‌شود که $\lim\limits_{x\to 0}(1+\frac{x^2}{2})=1=\lim\limits_{x\to 0}(1-\frac{x^2}{4})$ بنا بر قضیهٔ ساندویچ $\lim\limits_{x\to 0} u(x)=1$ است.

قضیه: اگر $f(x)$ و $g(x)$ توابع و همچنان $f(x) \le g(x)$ باشد پس در صورت بودن لیمت، لیمت آن $\lim\limits_{x\to a} f(x) \le \lim\limits_{x\to a} g(x)$ است.

مثال: توابع $f(x)=\frac{15x-4}{5x+6}$ و $g(x)=\frac{15x+4}{5x-6}$ را در نظر می گیریم؛ واضح است که برای $x>1$ $f(x)<g(x)$ است.

حل:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{15x-4}{5x+6}=\frac{15}{5}=3$$

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{15x+4}{5x-6}=\frac{15}{5}=3$$

تمرین

لیمیت توابع زیر را در صورت موجودیت در نقاط داده شده دریافت کنید؟

1) $\lim\limits_{x\to 0} 6x^3-2x^2+5x+3$ 2) $\lim\limits_{x\to -1} x^7-2x-5$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(9x+2)^2-4}{x}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x^2+7x}{(2x-5)^2-9}$ 5) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x-2}$ 6) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x}{x^2-4x+1}$

لیمت توابع نسبتی

آیا می‌دانید رابطه‌های مقابل به چه نامی یاد می‌گردند؟

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$$

$$\infty - \infty$$

$$0 \cdot \infty$$

فعالیت

- لیمت تابع $y = x^2 - 1$ را دریافت کنید زمانی‌که $x \to -2$ تقرب کند.
- لیمت تابع $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ را دریافت کنید زمانی‌که $x \to +1$ تقرب کند.
- لیمت تابع $y = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$ را دریافت کنید زمانی‌که $x \to \infty$ تقرب کند.

از فعالیت فوق نتیجهٔ زیر را می‌توان نوشت:

- لیمت بعضی توابع به طور مستقیم از وضع نمودن قیمت به دست می‌آید.

- توابعی که اشکال مبهم مانند $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0.\infty$ ..... را به خود بگیرد بعد از رفع شکل ابهام، لیمت آن به دست می‌آید که به طور زیر آن‌را مورد مطالعه قرار می‌دهیم:

I- شکل مبهم $\frac{0}{0}$:

فعالیت

- لیمیت تابع $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 1}$ را در نقطهٔ $x = -1$ به دست بیاورید.
- لیمیت تابع $f(x)$ وقتی که $x \to 1$ کند، چه نوع شکل از ابهام را دارد؟
- اگر $x = 1$ باشد آیا تابع $f(x)$ را طوری ساده ساخته می‌توانیم که تابع یک قیمت معین را به خود اختیار کند.

نتیجهٔ فعالیت بالا را این‌طور بیان می‌کنیم:

اگر یک تابع شکل مبهم $\frac{0}{0}$ را داشته باشد، برای دریافت لیمت آن به طور زیر عمل می‌نماییم:

ابتدا تابع را تجزیه می کنیم، بعد آن را ساده می‌سازیم عامل ابهام(فکتور خبیثه) آن‌را از بین می‌بریم و سپس قیمتی را که متحول به آن تقرب می‌نماید وضع می‌نماییم قیمت تابع بدست می‌آید.

مثال ها: لیمت‌های زیر را بدست آرید:

$$1)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}\quad,\quad 2)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}\quad,\quad 3)\ \lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$$

حل: ابتدا شکل لیمت را تعیین می‌نماییم:

$$1)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=\frac{(-2)^2-4}{-2+2}=\frac{0}{0}$$

چون لیمت فوق شکل مبهم $\frac{0}{0}$ را دارا است، پس به کمک تجزیه قیمت لیمت را به دست می‌آوریم:

$$\Rightarrow \lim_{x\to -2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)}=\lim_{x\to -2}(x-2)=-2-2=-4$$

$$2)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}=\frac{2^2-12+8}{2-2}=\frac{0}{0}$$

حل: مثال دوم هم شکل $\frac{0}{0}$ را دارد؛ پس: $\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-4)=2-4=-2$

$$3)\ \lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}=\frac{0}{0}$$

حل: در مثال دیده می‌شود که لیمت شکل مبهم $\frac{0}{0}$ را دارا است؛ پس برای ساده کردن آن صورت و مخرج را درمزدوج صورت ضرب می‌نماییم.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}\cdot\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4}=\lim_{x\to 16}\frac{(x-16)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}=\lim_{x\to 16}\frac{1}{\sqrt{x}+4}=\frac{1}{8}$$

تمرین

$$1)\ \lim_{x\to 3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}=?\qquad 2)\ \lim_{x\to 1}\frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}=?\qquad 3)\ \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=?$$

$$4)\ \lim_{x\to 2}\frac{\frac{2x}{x^2+1}-\frac{4}{5}}{x-2}=?\qquad 5)\ \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+3}-\frac{1}{3}}{x}=?$$

II- شکل مبهم $\frac{\infty}{\infty}$

آیا لیمت تابع مقابل را می‌توانید تعیین کنید؟

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x+8}{2x^2-2}$$

فعالیت

- لیمت تابع $f(x)=2x^4+x^3-4x-1$ را در صورتی دریافت نمایید که $x\to\infty$ تقرب کند.
- لیمت تابع $g(x)=x^3-2x-4$ را در صورتی دریافت نمایید که $x\to\infty$ تقرب کند.
- لیمت تابع $y=\frac{5}{x-2}$ را در صورتی دریافت نمایید که $x\to\infty$ تقرب کند.
- لیمت تابع $\frac{f(x)}{g(x)}$ را در صورتی دریافت نمایید که $x\to 0$ تقرب کند.
- لیمت تابع $\frac{f(x)}{g(x)}$ را در صورتی دریافت نمایید که $x\to\infty$ تقرب کند.

نتیجهٔ فعالیت فوق را به طور زیر مورد مطالعه قرار می‌دهیم:

نتیجه: برای دریافت لیمت توابعی که شکل مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ را داشته باشند، این‌طور عمل می‌کنیم:

صورت و مخرج تابع را تقسیم بر متحولی می‌نماییم که نسبت به همه بزرگ‌ترین توان را داشته باشد، بعد از ساده ساختن لیمت آن به دست می‌آید.

مثال 1: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}$ را دریافت کنید.

حل: ابتدا شکل مبهم لیمت را تعیین می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}=\frac{\infty-1}{\infty-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

چون لیمت شکل $\frac{\infty}{\infty}$ را دارد؛ صورت و مخرج را به بزرگ‌ترین توان x تقسیم می‌نماییم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}}{3-\frac{2}{x^2}}=\frac{1-\frac{1}{\infty}}{3-\frac{2}{\infty}}=\frac{1-0}{3-0}=\frac{1}{3}$$

مثال2: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x-2}$ را دریافت کنید.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x+2}=\frac{\infty-2}{\infty+2}=\frac{\infty}{\infty}$$

حل: چون لیمت فوق شکل $\frac{\infty}{\infty}$ را دارد؛ صورت و مخرج کسر را به بلندترین توان x تقسیم می‌نماییم.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(1-\frac{2}{x^2})}{x^2(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2})}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{1-\frac{2}{\infty^2}}{\frac{1}{\infty}+\frac{2}{\infty}}=\frac{1-0}{0}=\frac{1}{0}=\infty$$

مثال3: $\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-2}$ را دریافت نمایید.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=\frac{\infty-1}{\infty^2-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

حل: چون لیمت فوق شکل $\frac{\infty}{\infty}$ را دارد؛ صورت ومخرج کسر را به بلندترین توان x تقسیم می‌نماییم.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}=\frac{\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}}{1-\frac{2}{\infty}}=\frac{0}{1-0}=\frac{0}{1}=0$$

یادداشت: توابعی که شکل مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ را دارند بدون اجرای عملیه می‌توانیم لیمت آنها را به‌دست آوریم:

تـــابع $f(x)=\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+...+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+...+b_n}$ را در نظـــر بگیریـــد؛ اگـــر x بـــه بـــی‌نهایـــت تقـــرب کند $(x\to\infty)$:

1- اگر $m=n$ باشد لیمت تابع مذکور عبارت است از $\dfrac{a_0}{b_0}$.

2- اگر $m<n$ باشد لیمت تابع مذکور عبارت از صفر است.

3- اگر $m>n$ باشد لیمت تابع مذکور عبارت از ∞ است.

مثال 4: لیمت‌های زیر را بدون اجرای عملیه به دست آورید.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+6x^4-x^3+x-1}{-x^4+2x^2-3}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-8+6x^3-x^2+x}{5x^3-x^4+6x-1}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2}{x+1}$

حل:

1- در این مثال $m=n$ است؛ پس: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+6x^4-x^3+x-1}{-x^4+2x^2-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^4}{-x^4}=-6$

2- در این مثال $m<n$ است؛ پس: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-8+6x^3-x^2+x}{5x^3-x^4+6x-1}=0$

3- در این مثال $m>n$ است؛ پس: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2}{x+1}=\infty$

شاگردان جواب سؤال‌های داده شده را در خانه بعد از اجرای عملیه به دست آورند.

تمرین

قیمت لیمت‌های زیر را دریافت کنید:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6}{x^2-x}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+x^2+x+6}{x^3-3x+4}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+x^2-x+9}{x^4+x^2-x-5}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x^2-x+7}{x^3-x+5}$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2}{x+1}$

اشکال مبهم $(\infty-\infty)$ و $(0\cdot\infty)$

لیمت‌های مقابل را دریابید؟

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}-\frac{x-1}{x^2-4}$$

$$\lim_{x\to 3}(x^2-9)\cdot\frac{2x^3-4}{x-3}$$

- مزدوج $a+1$ را بنویسید.
- مزدوج $\sqrt{x}-1$ را بنویسید.
- قیمت لیمت تابع $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{x+1}$ را دریافت کنید. در صورتی‌که $x\to\infty$ تقرب کند.
- قیمت لیمت تابع $f(x)=(2x-1)(x+1)$ را دریافت کنید در حالی‌که $x\to\infty$ تقرب کند.

نتیجهٔ فعالیت فوق را به طور زیر بیان می‌کنیم:

برای دریافت لیمت توابعی که اشکال مبهم $(\infty-\infty)$ و $(0\cdot\infty)$ را داشته باشند از مزدوج استفاده نموده و آنها را طوری ساده می‌نماییم که اشکال $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ را اختیار نمایند، بعد از آن لیمت آن‌ها را به دست می‌آوریم:

مثال: قیمت لیمت‌های زیر را دریافت کنید:

$$1)\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{9}{x-1}-\frac{8x+10}{x^2-1}\right)=?\qquad 2)\ \lim_{x\to 1}(x-1)\left(\frac{1}{x^2+2x-3}\right)=?$$

حل 1:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{9}{x-1}-\frac{8x+10}{x^2-1}\right)=\frac{9}{1-1}-\frac{8\cdot 1+10}{1^2-1}=\frac{9}{0}-\frac{18}{0}=\infty-\infty$$

چون لیمت فوق شکل $(\infty-\infty)$ را دارد؛ می‌توانیم بنویسیم:

$$=\lim_{x\to 1}\frac{9x+9-8x-10}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

$$2)\ \lim_{x\to 1}(x-1)\left(\frac{1}{x^2+2x-3}\right)=?$$

حل2:

$$\lim_{x\to 1}(x-1)\left(\frac{1}{x^2+2x-3}\right)=(1-1)\left(\frac{1}{1^2+2-3}\right)=0\cdot\frac{1}{3-3}=0\cdot\frac{1}{0}=0\cdot\infty$$

به مشاهده می‌رسد که لیمت فوق شکل مبهم $(0\cdot\infty)$ را دارد؛ پس:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+3)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{4}$$

تمرین

لیمت‌های زیر را دریافت کنید.

$$1)\ \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$$

$$2)\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}\right)$$

$$3)\ \lim_{x\to\infty}(x^5-8x^3)$$

$$4)\ \lim_{x\to 5}\left[(x^2-25)\frac{1}{x-5}\right]$$

$$5)\ \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$$

اشکال مبهم $1^{\infty}, \infty^{0}, 0^{0}$

شکل مبهم لیمت مقابل را تعیین نمایید؟

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = ?$$

- لیمت تابع $y = x^{x}$ را در صورتی دریابید که $x \to 0$ کند.
- لیمت تابع $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ را در صورتی دریابید که $x \to \infty$ کند.
- به کمک کدام عملیه می‌توانیم ابهام اشکال مبهم $0^{0}, \infty^{0}$ و 1^{∞} را از بین ببریم.

نتیجهٔ فعالیت فوق را به طور ذیل بیان می‌نماییم:

هرگاه یک تابع یکی از اشکال مبهم فوق را اختیار نماید می‌توانیم آنرا با استفاده از لوگاریتم طبیعی به شکل $0\cdot\infty$ تبدیل کنیم؛ یعنی:

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)} \Rightarrow \ln(\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}) = \lim_{x\to a}(\ln f(x)^{g(x)}) = \lim_{x\to a}[g(x)\ln f(x)]$$

یادداشت:

I- هرگاه $n \to \infty$ تقرب نماید ترادف $a_n = (1+\frac{1}{n})^{n}$ به $e = 2.71828182$ تقرب میکند.

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n} = e$$

به جدول زیر نگاه کنید:

n	$\frac{1}{n}$	$1+\frac{1}{n}$	$(1+\frac{1}{n})^{n}$
1	1	2	2
2	0.5	1.5	2.25
5	0.2	1.2	2.48832
10	0.1	1.1	2.59374246
100	0.01	1.01	2.704813829
1000	0.001	1.001	2.716923932
10000	0.0001	1.0001	2.718145926
100000	0.00001	1.00001	2.718268237
1000000	0.000001	1.000001	2.718280469
1000000000	10^{-9}	$1+10^{-9}$	2.718281828

پس $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e = 2.718281828$ است که عدد ... $e=2.71$ به نام عدد Euler یاد می‌شود.

II- لیمت‌های زیر را دریابید.

1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{\alpha}{x})^{\beta x} = e^{\alpha\beta}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{Ln(1+x)}{x} = 1$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$

ثبوت: می‌دانیم که هر 4 سؤال فوق شکل مبهم 1^∞ را دارد:

1) $x=\frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha=\frac{1}{x}\ ,\ \alpha\to 0 \Rightarrow x\to\infty \Rightarrow \lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{\alpha}{x})^{\beta x} = e^{\alpha\beta}$

$$u=\frac{\alpha}{x} \Rightarrow x=\frac{\alpha}{u}\ ,\ x\to\infty \Rightarrow u\to 0$$

$$\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\beta\frac{\alpha}{u}} = \lim\limits_{u\to 0}\left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{\alpha\beta}$$

$$x=\frac{1}{u} \to u=\frac{1}{x}\ ,\ u\to 0 \Rightarrow x\to\infty$$

$$\lim\limits_{u\to 0}\left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{\alpha\beta} = \lim\limits_{x\to\infty}\left[(1+\frac{1}{x})^x\right]^{\alpha\beta} = e^{\alpha\beta}$$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)\right] = \lim\limits_{x\to 0}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]$

$$\ln\left[\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]\ ,\ x=\frac{1}{u} \Rightarrow u=\frac{1}{x}\ ,\ x\to 0 \Rightarrow u\to\infty$$

$$\ln\left[\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \ln\left[\lim\limits_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^u\right] = \ln e = 1$$

4) $y=e^x-1 \quad \Rightarrow \quad e^x=1+y \quad \Rightarrow \quad x=\ln(1+y)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}}$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{1}{y}\ln(1+y)}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}} \quad , \quad y=\frac{1}{x} \;\Rightarrow\; x=\frac{1}{y} \quad , \quad y\to 0 \;\Rightarrow\; x\to\infty$$

$$=\frac{1}{\ln\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x}=\frac{1}{\ln e}=\frac{1}{1}=1$$

شکل عمومی مبهم 1^∞ : هرگاه لیمت تابع اکسپوننشیل $\lim\limits_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}$ شکل مبهم 1^∞ را به خود اختیار نماید، درین حالت تعویض $\alpha=u-1$ را در نظر می گیریم:

$$\lim_{x\to a}u^v=\lim_{x\to a}[(1+u-1)]^{\frac{v}{u-1}u-1}=\lim_{x\to a}\left[(1+\alpha)^{\frac{v}{\alpha}\alpha}\right]=\lim_{x\to a}\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\lim\limits_{x\to a}(v\alpha)}$$

چون $\alpha=u-1$ است، اگر $u\to 1$ پس $\alpha\to 0$ تقرب می کند؛ در نتیجه:

$$\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}=\left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\lim\limits_{x\to a}[v(u-1)]}=e^{\lim\limits_{x\to a}[v(u-1)]}=e^P$$

$$\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}=e^P \quad , \quad P=\lim_{x\to a}[v(u-1)]$$

مثال 1: قیمت لیمت $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x$ را به دست آورید.

حل: نخست شکل مبهم لیمت را تعیین می‌نماییم؛ طوری که معلوم می‌شود شکل مبهم 1^∞را دارد، بنابرین از فورمول استفاده می‌نماییم:

$$u=1+\frac{2}{x} \quad , \quad v=x$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x=e^P \quad , \quad P=\lim_{x\to\infty}\left[x(1+\frac{2}{x}-1)\right]=2$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x=e^P=e^2$$

مثال 2: قیمت لیمت $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}$ را به دست آورید.

حل: نخست قیمت شکل مبهم لیمت را تعیین می‌نماییم: $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}=1^\infty$

طوری که معلوم می‌شود، لیمت ذکر شده شکل مبهم 1^{∞} را دارد؛ بنابرین از فورمول استفاده می‌نماییم:

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}=e^{P}$$

$$u=1+\frac{1}{x}\quad,\quad v=\frac{x-5}{2}$$

$$P=\lim_{x\to a}[v(u-1)]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x-5}{2}(1+\frac{1}{x}-1)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x-5}{2}(\frac{1}{x})\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x-5}{2x}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}=e^{P}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

مثال 3: $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=?$

حل: باز هم در مرحلهٔ اول، شکل لیمت را تعیین می‌نماییم: $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=1^{\infty}$

همان طور که دیده می‌شود لیمت ذکر شده شکل مبهم 1^{∞} را دارد؛ بنابرین از فورمول استفاده می‌نماییم:

$$u=\cos x\quad,\quad v=\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^{P}$$

$$P=\lim_{x\to a}[v(u-1)]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}(\cos x-1)\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x(\cos x+1)}$$

$$\frac{\cos^2 x+\cos x-\cos x-1}{x(\cos x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x-\cos^2 x}{x(\cos x+1)}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+1}=-1\cdot\frac{0}{2}=0$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^{P}=e^{0}=1$$

تمرین

لیمت‌های زیر را محاسبه نمایید؟

1) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x+2}$

2) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x}$

3) $\lim_{x\to\infty}(\frac{x+3}{x-1})^{x+2}$

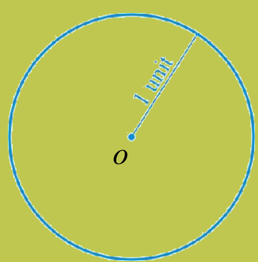
4) $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}$

5) $\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x}}$

لیمت توابع مثلثاتی

Trigonometric functions Limit

اگر شعاع یک دایره، یک واحد طول باشد، دایرهٔ مذکور چه نوع دایره‌یی است؟



فعالیت

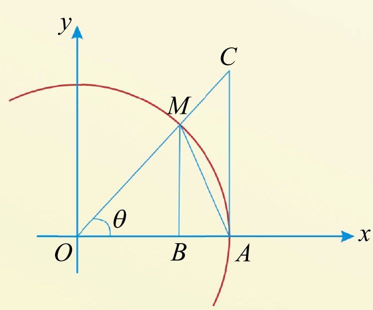
- در دایرهٔ مثلثاتی $C(o,r)$ زاویهٔ مرکزی θ را رسم کنید.
- از نقطهٔ خارجی C به دایره مماس CA و عمود MB را رسم نمایید.
- نقطهٔ C را به مرکز دایره وصل کنید.
- واحد اندازه‌گیری قوس مقابل زاویهٔ مرکزی را نشان دهید.

با استفاده از فعالیت فوق، قضیهٔ زیر را بیان و ثبوت می‌کنیم:

قضیه: لیمت نسبت ساین یک زاویه و خود زاویه مساوی با (1) است زمانی‌که زاویه به صفر تقرب نماید.

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

ثبوت: با در نظر داشت شکل زیر و با استفاده از مثلث های MOA ، COA و قطاع $O\overset{\frown}{M}A$ مساحت‌ها را به دست می‌آوریم:



$$OMA \text{ مساحت مثلث } = \frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{BM}=\frac{1}{2}\cdot r\cdot\overline{BM}=\frac{\overline{BM}}{2}$$

$$\text{مساحت قطاع } = \frac{1}{2}\theta r^2$$

وسعت زاویه θ را باید به رادیان به دست آوریم:

$$COA \text{ مساحت مثلث } = \frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{AC}=\frac{1}{2}\cdot r\cdot\overline{AC}=\frac{\overline{AC}}{2}$$

مساحت مثلث‌های COA و MOA و مساحت قطاع OAM را با هم مقایسه و اطراف نامساوات را به $\frac{2}{r^2}$ ضرب نموده، داریم که:

$$\frac{\overline{BM}}{r} < \theta < \frac{\overline{AC}}{r} \Rightarrow \sin\theta < \theta < \tan\theta \Rightarrow 1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1 \Rightarrow \lim_{\theta\to 0}\cos\theta \le \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} \le \lim_{\theta\to 0} 1$$

می‌دانیم که $\lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$ و $\lim_{\theta\to 0} 1 = 1$ است؛ پس نظر به قضیهٔ ساندویچ $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ می‌باشد.

می‌دانیم که ساین هر زاویهٔ اختیاری بین (1) و (-1) تحول دارد، بنابرآن:

$$-1 \le \sin\theta \le 1$$

$$-\frac{1}{\theta} \le \frac{\sin\theta}{\theta} \le \frac{1}{\theta}$$

$$-\lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta} \le \lim_{\theta\to\infty}\frac{\sin\theta}{\theta} \le \lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta}$$

به اساس قضیهٔ ساندویچ می‌توانیم بنویسیم:

$$\left.\begin{array}{l} -\lim\limits_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta} = 0 \\ \lim\limits_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{\theta\to\infty}\frac{\sin\theta}{\theta} = 0$$

در نتیجه گفته می‌توانیم که لیمت نسبت ساین زاویه و خود زاویه، وقتی‌که زاویه به بی‌نهایت تقرب نماید، مساوی با صفر است.

مثال 1: لیمت $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$ را پیدا کنید.

حل: اگر $2x = \alpha$ باشد پس $x = \frac{\alpha}{2}$ است، چون $x \to 0$ تقرب کرده، $\alpha \to 0$ تقرب می‌کند.

بنابرین می‌توانیم بنویسیم که: $\frac{\sin\alpha}{\frac{\alpha}{2}} = 2\frac{\sin\alpha}{\alpha}$

از مساوات فوق به دست می‌آید:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow 2\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 2\cdot 1 = 2$$

مثال 2: لیمت $\lim_{x\to 0}\frac{5\tan 2x}{7x}$ را دریابید.

حل:

$$\frac{5\tan 2x}{7x}=\frac{5\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{7x}=\frac{5\sin 2x}{7x\cos 2x}=\frac{5\cdot 2x\frac{\sin 2x}{2x}}{7x\cos 2x}=\frac{10\frac{\sin 2x}{2x}}{7\cos 2x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\tan 2x}{7x}=\frac{10}{7}\frac{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}}{\lim_{x\to 0}\cos 2x}=\frac{10}{7}$$

مثال 3: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}$ را دریافت کنید.

حل: می‌دانیم که $1-\cos 2x=2\sin^2 x$ است؛ پس:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin x=2\cdot 1\cdot 0=0$$

مثال 4: $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}$ را حساب کنید؟

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{\cos 3x}}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3x\frac{\sin 3x}{3x}}{\cos 3x}}{5x\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{3x}{5x}\frac{\frac{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}{\lim_{x\to 0}\cos 3x}}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{3}{5}\frac{\frac{1}{1}}{1}=\frac{3}{5}$$

مثال 5: $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 6x}{x^2}$ را حساب کنید.

حل: می‌دانیم که $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ است؛ پس:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{4x+6x}{2}\sin\frac{4x-6x}{2}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 5x\sin(-x)}{x^2}=-2\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{x}$$

اگر $5x = y$ با شد هر گاه $x \to 0$ پس $y \to 0$ می‌کند در این صورت داریم که:

$$=10\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=10\cdot 1\cdot 1=10$$

تمرین

لیمت‌های زیر را محاسبه کنید؟

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x+\frac{\pi}{6})}{x+\frac{\pi}{6}}$ 2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}$ 3) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\tan^2 x}$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x}$ 5) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 3x}$ 6) $\lim_{x\to 0}\sin 5x\cos 3x$

7) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(2x-1)}{4x^2-1}$ 8) $\lim_{x\to 0}\sqrt{\cos 2x-\cos x+1}$ 9) $\lim_{x\to 1}(\cos^2 x+\sin^2 x)$

متمادیت توابع

Continuity of Functions

به تصاویر دقت کنید.

پل اول و پل دوم باهم چه فرقی دارند؟

گراف‌های توابع اشکال مختلف دارند: بعضی از آنها به یک قلم رسم می‌شوند؛ یعنی بدون این‌که نوک قلم از روی کاغذ بلند شود توابع متصل یا متمادی رسم می‌شوند، اما بعضی از آنها به یک قلم رسم شده نمی‌توانند، یعنی در وقت رسم کردن گراف تابع نوک قلم یک و یا چند مرتبه از صفحهٔ کاغذ بلند می‌شود، زیرا در یک قسمت گراف تابع قطع می‌گردد و دوباره به استقامت خود ادامه می‌یابد که این نوع توابع را غیر متصل یا غیر متمادی می‌نامند.

فعالیت

- گراف تابع $f(x) = x^2 + 4x$ را رسم کنید.
- لیمت تابع $f(x)$ را در نقطهٔ $x = 1$ دریافت کنید.
- قیمت تابع $f(x)$ را در نقطهٔ $x = 1$ بررسی و بعد هر دو رابطه را با هم مقایسه کنید؟

از نتیجهٔ فعالیت فوق می‌توانیم بنویسیم که:

تابع $y = f(x)$ در نقطهٔ $x = a$ متمادی گفته می‌شود زمانی‌که شرط‌های زیر تحقق یابد:

1- نقطهٔ a در ساحهٔ تعریف $f(x)$ شامل باشد.

2- تابع داده شده در نقطهٔ a لیمت داشته باشد.

3- قیمت $f(a)$ باید با لیمت $f(x)$ مساوی باشد $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

مثال 1: نشان دهید که تابع $f(x)=x^2+2x-1$ در نقطهٔ $x_0=2$ متمادی است.

حل: چون ساحهٔ تعریف تابع اعداد حقیقی است:

$$1)\ 2\in Dom\ f(x)=IR$$

$$\left.\begin{aligned}&2)\ \lim_{x\to 2}(x^2+2x-1)=4+4-1=7\\&3)\ f(2)=2^2+4-1=7\end{aligned}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 2}f(x)=f(2)=7$$

بنابرین هر سه شرط متمادیت در تابع فوق صدق می کند و تابع داده شده، یک تابع متمادی است.

مثال 2: متمادیت تابع $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ را در نقطهٔ $x=-1$ تحقیق کنید:

حل: ناحیه تعریف تابع $f(x)$ عبارت از $IR\setminus\{-1\}$ است که -1 شامل آن نیست؛ پس داریم که:

$$1)\ Dom\ \ f(x)=IR\setminus\{-1\}$$

$$2)\ \lim_{x\to -1}\frac{2x-1}{x+1}=\frac{-3}{0}=\infty$$

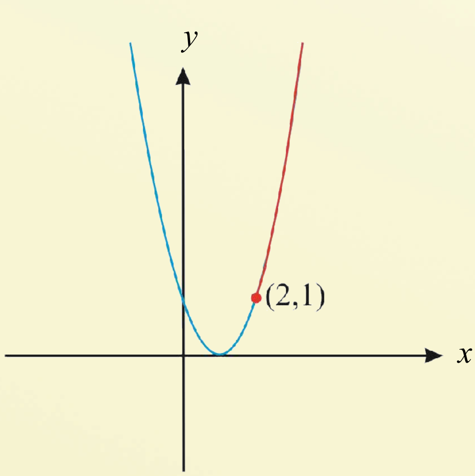
چون $x=-1$ در ناحیه تعریف شامل نیست، تابع در نقطهٔ $x=-1$ متمادی نیست.

مثال 3: متمادیت تابع $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+1\ ;\ x<2\\ x^2-3\quad\ \ ;\ x\geq 2\end{cases}$ را در نقطهٔ $x=2$ تحقیق نمایید:

حل: ابتدا لیمت‌های دست راست و چپ تابع را تحقیق می‌نماییم:

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}(x^2-3)=1\\&\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x^2-2x+1)=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^-}f(x)\quad\Rightarrow\ \lim_{x\to 2}f(x)=f(2)$$

در نتیجه گفته می‌توانیم که تابع فوق در نقطهٔ داده شده متمادی است که در شکل هم دیده می‌شود.



مثال 4: متمادیت تابع $f(x)=\begin{cases}2x+1 & ; x\geq 1\\ 1-x & ; x<1\end{cases}$ را در نقطهٔ $x=1$ تحقیق کنید.

حل:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 2x+1=3\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 1-x=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x)\neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

در نتیجه، گفته می‌توانیم که تابع در نقطهٔ فوق متمادی نیست.

نتیجه: اگر تابع $g(x)$ در $x=a$ و تابع $f(x)$ در $x=g(a)$ متمادی باشد؛ پس تابع $f(g(x))$ در $x=a$ نیز متمادی است؛ یعنی:

$$\lim_{x\to a} f(g(x))=f(\lim_{x\to a} g(x))=f(g(a))$$

1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{\alpha}=(\lim\limits_{x\to a} f(x))^{\alpha} \quad , \quad \alpha\in IR$

2) $\lim\limits_{x\to a} a^{f(x)}=a^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$

3) $\lim\limits_{x\to a}\log_a f(x)=\log_a(\lim\limits_{x\to a} f(x))$

4) $\lim\limits_{x\to a}\sin f(x)=\sin(\lim\limits_{x\to a} f(x))$

مثال 5: اگر $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$, $x\neq -3$ باشد، آیا تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=-3$ متمادی است؟

حل: چون تابع در $f(-3)$ قابل تعریف نمی‌باشد، تابع در نقطهٔ $x=-3$ متمادی نیست.

غیرمتمادیت: هرگاه تابع $f(x)$ در $x=a$ یکی از سه شرط متمادیت را نداشته باشد، می‌گوییم که $f(x)$ در a غیر متمادی است و a نقطهٔ انفصال می‌باشد. انفصال سه نوع است:

1- نوع اول: تابع f در $x=a$ دارای لیمت‌های راست و چپ بوده ولی این لیمت‌ها مساوی با یکدیگر نمی‌باشند.

2- نوع دوم: اگر دست کم یکی از لیمت‌ها(راست و چپ) وجود نداشته باشد.

3- نوع سوم: در صورتی که تابع در یک نقطه دارای لیمت بوده، ولی در آن تعریف نشده باشد(فقط یک نقطهٔ خالی باشد).

تمرین

1- به ذوق خود یک تابع بنویسید، گراف تابع مذکور را رسم کنید، ساحهٔ تعریف آنرا مشخص بسازید. و سپس متمادیت آنرا نشان دهید.

2- به توابع زیر دقت کنید و نشان دهید که آنها در نقاط داده شده متمادی اند یا غیرمتمادی:

$a)\ f(x)=x^2+5(x-2)^7 \quad ; \quad x=3$

$b)\ f(x)=\dfrac{x+3}{(x^2+2x-5)} \quad ; \quad x=-1$

$c)\ h(x)=\dfrac{\sqrt{8-x^2}}{2x^2-5} \quad ; \quad x=-2$

$d)\ f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^3} \quad ; \quad x=3$

$e)\ f(x)=|x-3| \quad ; \quad x=3$

$f)\ g(x)=\dfrac{|x|}{x} \quad ; \quad x=0$

$$g)\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+x}{x} & ; \quad x\neq 0\\ 3 & ; \quad x=2\end{cases}$$

$h)\ f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3} \quad ; \quad x=2$

خواص توابع متمادی

آیا مساوات مقابل حقیقت دارد؟

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$
$$(f \div g)(x) = f(x) \div g(x) \quad , \ g(x) \neq 0$$

- اگر $f(x) = x^2 - 1$ باشد، متمادیت تابع را تحقیق نمایید.
- اگر $g(x) = x + 3$ باشد، متمادیت تابع را تحقیق کنید.
- متمادیت $f(x) + g(x)$ را تحقیق نمایید.

نتیجهٔ فعالیت فوق را به طور زیر بیان می‌نماییم:

نتیجه

اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ در $x = c$ متمادی باشند؛ پس توابع زیر هر کدام در $x = c$ متمادی اند.

1. $f(x) + g(x)$ جمع توابع
2. $f(x) - g(x)$ تفریق توابع
3. $f(x) \cdot g(x)$ ضرب توابع
4. $g(x) \neq 0 \ ; \ \dfrac{f(x)}{g(x)}$ تقسیم توابع.

مثال 1: اگر $f(x) = x^2 + 3$ و $g(x) = x^2 + 3x - 2$ باشد:

1- f و g در نقطهٔ $x = 1$ متمادی است یا نه؟

2- تحقیق کنید که:

الف) $f(x)+g(x)=(f+g)(x)$ است.

ب) $f(x)\cdot g(x)=(f\cdot g)(x)$ در $x=1$ متمادی است یا غیرمتمادی؟

حل: ابتدا هر تابع را جداگانه تحقیق می‌نماییم که متمادی است یا خیر.

1) $Df(x)=IR$

2) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3)=4$

3) $f(1)=(1^2+3)=4$

پس تابع f در نقطهٔ $x=1$ متمادی است.

1) $D\,g(x)=IR$

2) $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3x-2)=1^2+3\cdot 1-2=2$

3) $g(1)=(1^2+3\cdot 1-2)=2$

به همین قسم تابع g در نقطهٔ $x=1$ هم متمادی است.

2- حالا متمادیت حاصل جمع و حاصل ضرب توابع را تحقیق می‌نماییم:

الف)

$f(x)+g(x)=x^2+3+x^2+3x-2=2x^2+3x+1$

1) $D(f(x)+g(x))=IR$

2) $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to 1}(2x^2+3x+1)=6$

3) $f(1)+g(1)=(1+3+1+3-2)=6$

$\lim\limits_{x\to 1}[f(x)+g(x)]=f(1)+g(1)=6$

$(f+g)(x)=x^2+3+x^2+3x-2=2x^2+3x+1$

1) $D[(f+g)(x)]=IR$

2) $\lim\limits_{x\to 1}[(f+g)(x)]=\lim\limits_{x\to 1}[2x^2+3x+1]=6$

3) $(f+g)(1)=(2x^2+3x+1)(1)=6$

$\lim\limits_{x\to 1}[(f+g)(x)]=(f+g)(1)=6$

در نتیجه مجموع توابع متمادی در نقطهٔ $x=1$ متمادی است.

ب)

$$f(x)\cdot g(x)=(x^2+3)(x^2+3x-2)=x^4+3x^3+x^2+9x-6$$

1) $D(f\cdot g)(x)=IR$

2) $(f\cdot g)_{(1)}=1^4+3\cdot 1^3+1^2+9\cdot 1-6=8$

3) $\lim\limits_{x\to 1}(f\cdot g)(x)=8$

$\lim\limits_{x\to 1}(f\cdot g)(x)=(f\cdot g)(1)=8$

در نتیجه ضرب توابع متمادی در نقطهٔ $x=1$ متمادی است.

مثال 2: هرگاه $g(x)=3x-2$, $f(x)=x+1$ باشد، تحقیق نمایید که $f(x)\cdot g(x)$ در $x=2$ متمادی است.

حل:

1) $Df(x)=IR$

2) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x+1)=3$

3) $f(2)=x+1=3$

$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)=3$

1) $Dg(x)=IR$

2) $\lim\limits_{x\to 2}g(x)=3x-2=3\cdot 2-2=4$

3) $g(2)=3x-2=3\cdot 2-2=4$

$\lim\limits_{x\to 2}g(x)=g(2)=4$

$$f(x)\cdot g(x)=(x+1)(3x-2)=3x^2-2x+3x-2=3x^2+x-2$$

$D(f\cdot g)(x)=IR$

$\lim\limits_{x\to 2}[f(x)\cdot g(x)]=3(4)+2-2=12$

$(f\cdot g)(2)=3(4)+2-2=12$

$\lim\limits_{x\to 2}[f(x)\cdot g(x)]=(f\cdot g)(2)=12$

در نتیجه به دست می آید که $f(x)\cdot g(x)$ متمادی است.

تمرین

1- نشان دهید که در نقاط داده شده توابع متمادی اند.

1) $f(x) = x^3 - 2(x+1)^5 \quad ; \quad x = 2$

2) $g(x) = \dfrac{x^2+3}{(x^2-x+5)(x^2+2x)} \quad ; \quad x = -1$

3) $h(x) = \dfrac{x\sqrt{x}+1}{(x+2)^3} \quad ; \quad x = 4$

2- شرح دهید که چرا تابع $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2}}{x}$ در نقطهٔ $x = 0$ غیرمتمادی است.

تقرب متحول: به آن گفته می‌شود که متحول x به عدد معین a تقرب می‌کند، در صورتی که x حسب دلخواه به a نزدیک شود؛ یعنی تفاوت بین x و a از هر عدد کوچک$(\delta > 0)$ کوچک‌تر گردد. مفهوم فوق به طور سمبولیک با عبارات معادل ذیل افاده می‌گردد:

$\forall \delta > 0 : |x-a| < \delta$ یا $x \to a$ یا $|x-a| \to 0$

تقرب متحول از راست$(x \to a^+)$: اگر یک ترادف متناقص قیمت‌های x وجود داشته باشد طوری که به گونهٔ تدریجی حسب دلخواه به a نزدیک شوند، چنانچه:

$$x : a+0.1,\ a+0.01\ ,\ a+0.001\ ,\ a+0.0001\ ,\ \dots \to a^+$$

تقرب متحول از چپ$(x \to a^-)$: در صورتی که ترادف متزاید قیمت‌های x تعیین شده بتواند طوری که به گونهٔ تدریجی حسب دلخوا به a نزدیک شوند، چنانچه:

$$x : a-0.1,\ a-0.01\ ,\ a-0.001\ ,\ a-0.0001\ ,\ \dots \to a^-$$

بنابرین، تقرب متحول x به عدد a معادل است با تقرب از دو سمت(راست و چپ)؛ یعنی:

$$x \to a \iff (x \to a^+\ ,\ x \to a^-)$$

تعریف: هرگاه تابع $f(x)$ در یک انتروال باز که عدد a شامل آن است، تعریف شده باشد(ولوکه در a غیر قابل تعریف باشد) و با تقرب متحول x به a، $f(x)$ حسب دلخواه به عدد l نزدیک شود، گفته می‌شود که لیمت تابع $f(x)$ عبارت از l است زمانی که x به a تقرب کند و می‌نویسند که: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ یا $\begin{matrix} x \to a \\ f(x) \to l \end{matrix}$

خواص لیمت: اگر f و g دو تابع و C, L و M اعداد حقیقی باشند طوری که $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ و $\lim\limits_{x \to c} g(x) = M$ باشد؛ می‌توانیم بنویسیم:

1) $\lim\limits_{x \to c}(f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to c} f(x) + \lim\limits_{x \to c} g(x) = L + M$

2) $\lim\limits_{x \to c}(f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x \to c} f(x) - \lim\limits_{x \to c} g(x) = L - M$

3) $\lim\limits_{x \to c}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to c} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to c} g(x) = L \cdot M$

4) $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)} = \dfrac{L}{M}\ ,\quad M \neq 0\quad ,\quad g(x) \neq 0$

5) $\lim\limits_{x \to c} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim\limits_{x \to c} f(x)} = \sqrt{L}$

توابع بی‌نهایت کوچک: تابع $\varepsilon(x)$ در $x \to a$ بی‌نهایت کوچک نامیده می‌شود، هرگاه $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x)=0$ باشد.

قضیهٔ ساندویچ: هرگاه توابع $f(x), g(x)$ و $h(x)$ برای هر x از یک انتروال باز که عدد a را در بر دارد (ولو برای $x \neq a$)، شرط $f(x)\le g(x)\le h(x)$ را صدق کند، در صورتی که $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b=\lim\limits_{x\to a} h(x)$ باشد؛ پس $\lim\limits_{x\to a} g(x)=b$ است.

- اگر یک تابع شکل $\frac{0}{0}$ را داشته باشد برای پیدا کردن لیمت آن ابتدا تابع مذکور را توسط تجزیه ساده می‌سازیم و بعد آن‌را به‌دست می‌آوریم.
- لیمت تابع $f(x)=\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ ...\ +a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ ...\ +b_n}$ وقتی که $x\to\infty$ کند، عبارت است از:
  1. اگر $m=n$ باشد، لیمت تابع مذکور عبارت است از $\frac{a_0}{b_0}$
  2. اگر $m<n$ باشد، لیمت تابع مذکور عبارت است از 0
  3. اگر $m>n$ باشد، لیمت تابع مذکور عبارت است از $\pm\infty$
- توابعی که اشکال مبهم $(\infty,-\infty)$ و $(0\cdot\infty)$ را داشته باشند، برای دریافت لیمت آنها از مزدوج استفاده می‌کنیم و آنها را طوری ساده می‌سازیم که اشکال مبهم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ را اختیار نمایند و بعد لیمت آنها را به‌دست می‌آوریم.
- توابعی که شکل مبهم 1^{∞} را به خود اختیار کنند برای به‌دست آوردن لیمت آنها از فورمول $P=\lim\limits_{x\to a}[v(u-1)]\quad,\quad \lim\limits_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}\overset{1^\infty}{=}e^P$ استفاده می‌نماییم.
- لیمت نسبت ساین یک زاویه و خود زاویه مساوی به (1) است زمانی‌که زاویه به صفر تقرب نماید: $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1$
- تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ متمادی گفته می‌شود وقتی‌که:
  1. نقطهٔ a در ساحهٔ تعریف $f(x)$ شامل باشد.
  2. تابع داده شده لیمت داشته باشد.
  3. قیمت $f(a)$ باید با لیمت $f(x)$ مساوی باشد: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

تمرینات عمومی فصل اول

به هر سوال چهار جواب داده شده است جواب درست را انتخاب کنید؟

1- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x - \sin x}{x}$

a) 2 b) -2 c) 1 d) 3

2- $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 + x - 2}$

a) $-\dfrac{5}{3}$ b) $\dfrac{5}{3}$ c) 0 d) 1

3- $\lim\limits_{x \to 1,4} (2x + 0.3)$

a) 1 b) 3 c) 0 d) هیچ کدام

4- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{\tan 2x}$

a) 1 b) 0 c) $\dfrac{3}{2}$ d) $\dfrac{2}{3}$

5- $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$

a) $2 + \sqrt{2}$ b) 2 c) $\sqrt{2}$ d) 4

6- $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - \sin x}{1 + \cos 2x}$

a) 1 b) $\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{1}{4}$ d) 4

7- لیمت‌های زیر را دریابید؟

1) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 2x + 5}{2x^2 + 1}$

2) $\lim\limits_{x \to -1} \sqrt{3 + x}$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6}{x^2 - 7}$

4) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^4 + x^2 + x + 6}{x^3 - 3x + 4}$

5) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 - 2}{x + 1}$

6) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 + 5x - 18}{x^2 + 3x - 10}$

7) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 2x - 4}{x - \sqrt{3x - 2}}$

8) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x - 10}$

9) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ax}{\tan bx}$

10) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos^2 x}{x \cos x}$

11) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{x^2-x-2}$

12) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x+3}{x+2}+\dfrac{2}{x^2+2x}\right)$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)+\sin(a-x)}{\tan(a+x)+\tan(a-x)}$

14) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+2}$

15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\sin x-\tan x}{x^2\sin x}$

16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x+\sin^2 x}{a x^2}$

17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 2x\sin x+\sin^2 x}{x^2}$

18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$

19) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin 3x\sin 2x}{x\tan 3x}$

20) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$

21) $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin 3(\pi+u)}{\sin 8(\pi+u)}$

22) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin \pi x}$

23) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2-x+3}{x^2-8x+5}$

24) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{8x+4}{4x+\sqrt{x}}$

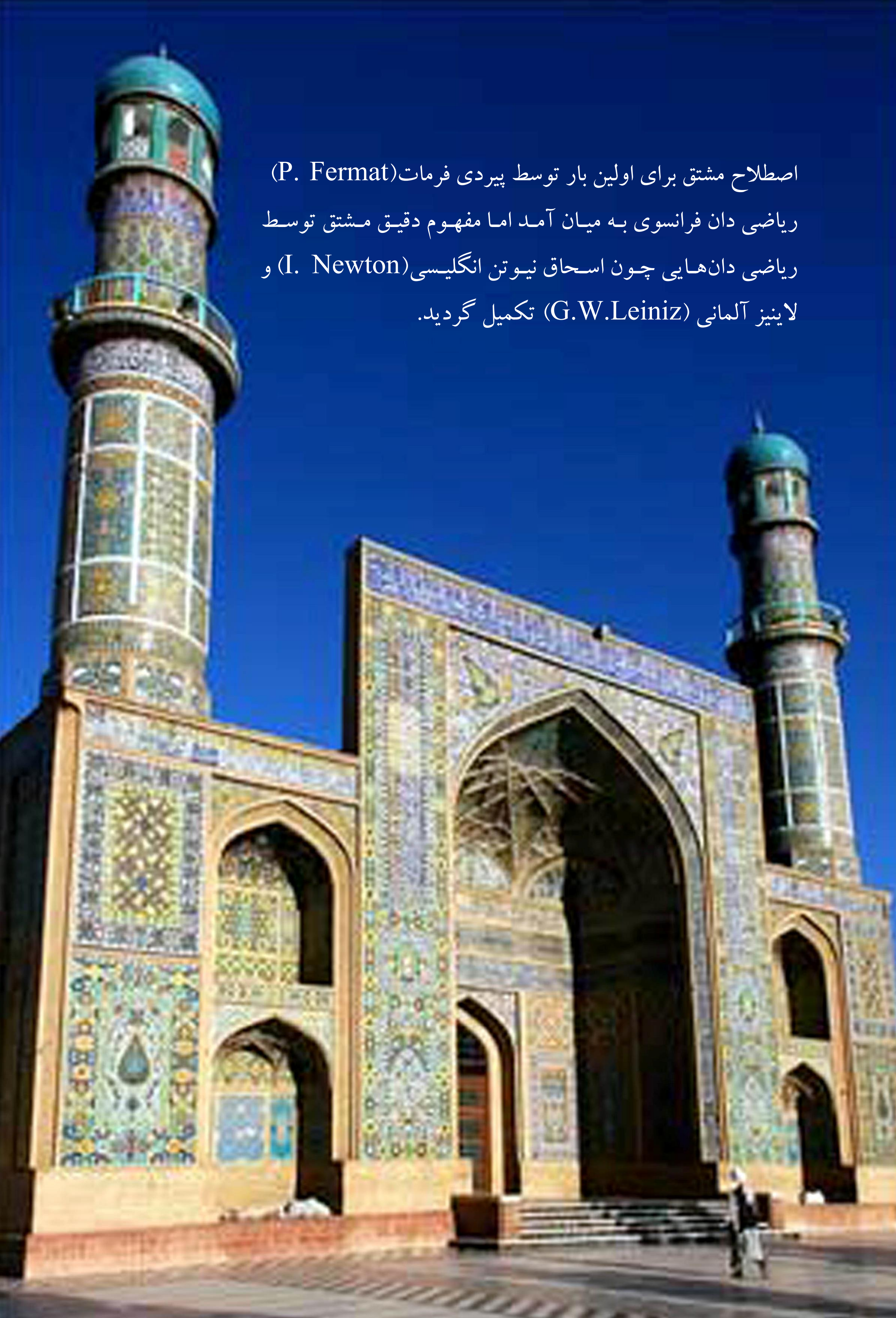
25) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{9x^2-x+5}{\sqrt{9x^4+1}}$

26) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1-x^2}\right)$

فصل دوم

مشتق

اصطلاح مشتق برای اولین بار توسط پیردی فرمات(P. Fermat)
ریاضی دان فرانسوی به میان آمد اما مفهوم دقیق مشتق توسط
ریاضی دان‌هایی چون اسحاق نیوتن انگلیسی(I. Newton) و
لاینیز آلمانی (G.W.Leiniz) تکمیل گردید.



مشتقات

Derivatives

تابع $f(x)=x^2-1$ را در نظر گرفته و لیمت کسر مقابل را دریابید؟

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=?$$

میل یک منحنی

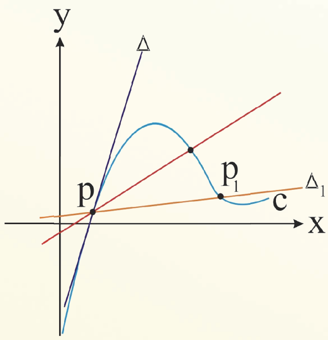
- هرگاه دونقطه $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ یک خط مستقیم معلوم باشد، میل آن از کدام رابطه به‌دست می‌آید.
- آیا میل یک خط مستقیم در تمام نقاط آن ثابت و مساوی است؟ و یا با یک نقطهٔ خاص ارتباط دارد؟
- آیا میل یک خط مستقیم با زاویه‌یی که مستقیم با جهت مثبت محور x می‌سازد، ارتباط دارد؟
- آیا میل یک خط مستقیم و یک منحنی یکسان به‌دست می‌آید؟

از سوال‌های فوق معلوم می‌گردد که میل یک منحنی را به آسانی دریافت کرده نمی‌توانیم؛ زیرا خط منحنی در هر نقطه از مسیر خود، جهت خود را تغییر می‌دهد و در نقاط مختلف میل‌های مختلف دارد؛ از همین سبب، ابتدا میل یک خط منحنی را در یک نقطهٔ آن تعریف نموده و بعد جهت محاسبهٔ آن، یک فورمول به‌دست می‌آوریم.

فعالیت

- خط منحنی C را در سیستم کمیات وضعیه رسم و نقاط P و P_1 را بالای آن انتخاب کنید.
- در نقطهٔ P_1 قاطع Δ_1 و در نقطهٔ P مماس Δ را رسم کنید.

• اگر نقطهٔ P_1 بالای منحنی C طوری حرکت نماید که به نقطهٔ P نزدیک شود، در نتیجه خط مستقیم Δ_1 با خط مستقیم Δ چه‌ارتباطی، پیدا می کند؟



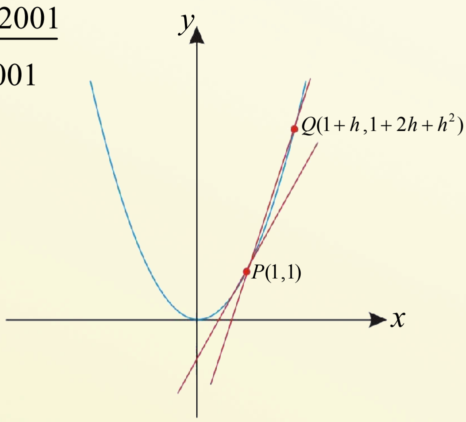
نتیجهٔ فعالیت فوق را در زیر بیان می‌نماییم:

میل خط مستقیم Δ که در نقطهٔ P به منحنی c مماس است، مساوی tan زاویهٔ است که خط مستقیم با جهت مثبت محور x می‌سازد.

مثال 1: میل مماس منحنی تابع $y = f(x) = x^2$ را در نقطهٔ $P(1,1)$ به‌دست آرید.

حل: چون میل منحنی با میل مماس در نقطهٔ P باهم برابر است. پس میل این مماس را از فورمولی که دو نقطهٔ آن معلوم باشد دریافت کرده نمی‌توانیم ؛ زیرا در این‌جا تنها مختصات یک نقطه داده شده است. بنابرین می‌توانیم قیمت تخمینی میل این مماس را از میل قاطع که از نقاط P و Q می‌گذرد به‌دست آوریم در صورتی که نقطهٔ Q به نقطهٔ P نزدیک شود میل مماس PQ به 2 تقرب می کند که در جدول زیر دیده می‌شود:

x	2	1.5	1.1	1.01	1.001
y	4	2.25	1.21	1.0201	1.002001
$m_{\overline{PQ}} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	3	2.5	2.1	2.01	2.001



به طور عمومی، ابتدا مختصه‌یی را که به نقطهٔ $P(1,1)$ نزدیک است به $1+h$ نشان داده می‌توانیم که h یک عدد کوچک مثبت یا منفی است اما $h \neq 0$ می‌باشد؛ پس می‌توانیم بنویسیم:

$$f(1+h) = (1+h)^2 = 1 + 2h + h^2$$

بنابرین نقطهٔ $(1+h \ , \ 1+2h+h^2)$ بالای منحنی واقع است. در نتیجه، میل خط مستقیمی که از نقاط $P(1,1)$ و $Q(1+h, 1+2h+h^2)$ می‌گذرد عبارت است از:

$$m_{pq}=\frac{1+2h+h^2-1}{(1+h)-1}=\frac{2h+h}{h}=\frac{h(2+h)}{h}=2+h$$

اگر در شکل $h\to 0$ پس $Q\to P$ تقرب می‌نماید و خط قاطع PQ در نقطهٔ $P(1,1)$ مماس می‌شود که این میل مماس را مشتق تابع گویند؛ یعنی: $\overline{PQ} \ = \lim\limits_{h\to 0}(2+h)=2$

این عملیهٔ لیمت برای ما این امکان را می‌دهد که میل منحنی تابع $y=x^2$ را در یک نقطهٔ اختیاری $P(x,y)$ به دست آوریم. هرگاه مختصات نقطهٔ Q، $[x+h \ , \ (x+h)^2]$ باشد اگر میل PQ را در نقطهٔ P به m و میل مماس را به m_T نشان دهیم، داریم که:

$$m=\frac{(x+h)^2-x^2}{x+h-x}=\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}=\frac{2xh+h^2}{h}=2x+h$$

$$m_T=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$$

پس به صورت عموم هرگاه نقاط $P[x \ , \ f(x)]$ و $Q[x+h \ , \ f(x+h)]$ دو نقطهٔ کیفی منحنی مذکور باشند، خارج قسمت پایین را که به‌نام خارج قسمت Newton معروف است، می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

و میل منحنی در هر نقطهٔ اختیاری آن عبارت است از:

$$m_T=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

مثال 2: میل منحنی تابع $f(x)=x-x^2$ را در نقطهٔ $P(2,0)$ دریابید.

حل: خارج قسمت Newton را تشکیل داده و در نقطهٔ $x=2$ میل منحنی را محاسبه می‌نماییم:

$$m_T=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)-(2+h)^2-2+2^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2+h-4-4h-h^2-2+4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h-4h-h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-3h+h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(-3-h)}{h}=\lim_{h\to 0}(-3-h)=-3$$

تغییر اوسط یا تغییر متوسط

هرگاه یک جسم بر روی یک خط مستقیم در حرکت باشد، طبیعی است که فاصلهٔ طی شده تابع زمان است؛ یعنی: $S = f(t)$

خارج قسمت $\dfrac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$ در زمان t_1 و t_2 سرعت وسطی جسم نامیده می‌شود و سرعت در زمان t_0 عبارت از لیمت آن است که به‌نام سرعت لحظه‌یی یاد می گردد.

در زمان t_0 و t می‌توان لیمت رابطهٔ فوق را چنین نوشت:

$$\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}=\lim_{t\to t_0}\frac{S-S_0}{t-t_0}=\frac{\Delta S}{\Delta t}$$

در نتیجه گفته می‌توانیم که تغییر متوسط عبارت از نسبت تزاید تابع بر متحول می‌باشد:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$$

مثال: تغییرات متوسط تابع $y=f(x)=x^2$ را در انتروال $[2,5]$ دریابید.

حل: چون $x_1=2$ و $x_2=5$ است، نظر به تعریف می‌توانیم بنویسیم که:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=\frac{5^2-2^2}{5-2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{25-4}{5-2}=\frac{21}{3}=7$$

تمرین

1- در توابع زیر برای متحول x تزاید Δx و برای y تزاید Δy را در نظر گرفته، نسبت $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ و میل منحنی را در نقاط خواسته شده دریابید.

1) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=?\ ,\quad f(x)=2x^2-4\quad ,\ (0)$

2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=?\ ,\quad f(x)=2x-x^2\quad ,\ (3)$

3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=?\ ,\quad f(x)=3x^2-5x+4\quad ,\ (2,-1)$

2- تغییرات متوسط تابع $f(t)=5t^3-3t+1$ را در انتروال $[2,4]$ دریابید؟

مشتق یک تابع

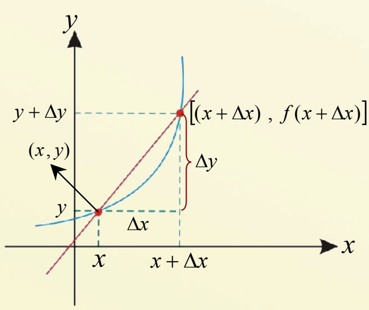
لیمت مقابل چه را نشان می‌دهد؟ آیا می‌توانیم آن را به شکل دیگری بنویسیم؟

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

- هر گاه تابع $y=f(x)$ در انتروال $[a,b]$ متمادی باشد، اگر متحول x به اندازهٔ Δx تزاید کند، آیا تزاید تابع به وجود می‌آید؟ در این صورت، رابطهٔ تزاید متحول و تابع را بنویسید.
- نسبت تزاید تابع بر تزاید متحول$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ را طوری بنویسید که در مساوات تغییر به وجود نیاید.
- اگر از اطراف این ارتباط لیمت اخذ گردد و Δx به طرف صفر تقرب نماید این لیمت را به‌نام چه یاد می کنند؟

نتیجهٔ فعالیت فوق را به طور زیر به دست آورده و بیان می‌نماییم:

$$y=f(x)$$
$$y+\Delta y=f(x+\Delta x)$$
$$\Delta y=f(x+\Delta x)-y$$
$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x) \quad / \quad \div \Delta x$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$



تعریف: لیمت نسبت تزاید تابع بر متحول وقتی که تزاید متحول به طرف صفر تقرب نماید، به نام مشتق تابع یاد می‌شود؛ مانند: $\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ که آن‌را به $f'(x)$ یا y' , $\frac{df}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$ نمایش می‌دهند.

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}=y'=f'(x)$$

مثال 1: هر گاه تابع $f(x)=2x$ باشد مشتق این تابع را دریابید.

حل: با استفاده از تعریف مشتق می‌توانیم بنویسیم که:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(x+\Delta x)-2x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x+2\Delta x-2x}{\Delta x}$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x}\ \Rightarrow\ f'(x)=2$$

مثال 2: مشتق تابع $f(x)=x^3$ را دریابید.

حل:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(3x^2+3x(\Delta x)+(\Delta x)^2)}{\Delta x}=3x^2+3x(0)+0^2\quad\Rightarrow\ f'(x)=3x^2$$

مثال 3: مشتق تابع $x\geq 0\ ,\ f(x)=\sqrt{x}$ را دریابید.

حل: قبل از حل، حالت $x\geq 0$ را در نظر می گیریم:

الف: هرگاه $x>0$ باشد، با استفاده از تعریف مشتق می‌توانیم بنویسیم که:

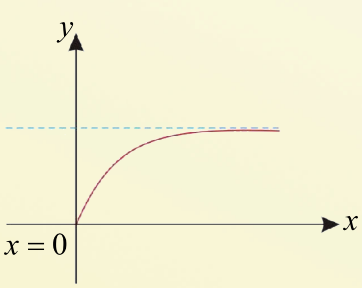
$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$$

صورت و مخرج را ضرب مرزدوج صورت می‌نماییم:

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}\quad\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ب: اگر $x=0$ شود؛ $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$ موجود نمی‌باشد؛ پس تابع $y=\sqrt{x}$ در نقطهٔ $x=0$ مشتق‌پذیر نیست، که در شکل دیده می‌شود؛ یعنی اگر x بسیار زیاد بزرگ شود میل مماس به صفر نزدیک می گردد و در نقطهٔ $x=0$ میل مماس $(\frac{1}{2\sqrt{x}})$ زیاد بزرگ می‌شود و بالاخره مماس به یک خط عمود تبدیل می گردد.



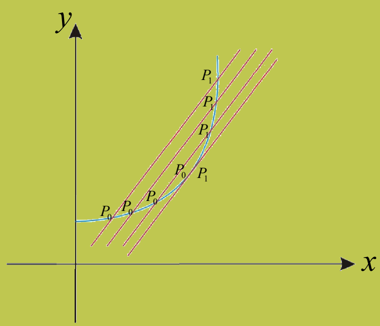
تمرین

مشتق توابع زیر را به کمک تعریف مشتق به‌دست آورید.

1) $f(x)=x-x^2$ 2) $f(x)=-2x^2$ 3) $f(x)=2x^2+x$

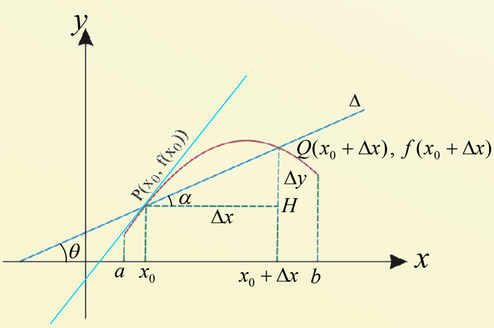
تعبیر هندسی مشتق

در شکل مقابل چه می‌بینید، در مورد آن مباحثه نمایید.



فعالیت

- منحنی تابع $f(x)$ را طوری که در انتروال $[a,b]$ متمادی باشد در مستوی کمیات وضعیه رسم و نقاط $P(x_0, f(x_0))$ و $Q(x_0+\Delta x\ ,\ f(x_0+\Delta x))$ را بالای آن انتخاب کنید.
- خط مستقیم Δ را طوری رسم نمایید که از نقاط P و Q منحنی بگذرد.
- خط مستقیم Δ با جهت مثبت محور x چه نوع زاویه‌یی را تشکیل می‌دهد؟
- نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ یا $\frac{HQ}{HP}$ را به‌نام چه یاد می‌کنند؟
- هرگاه نقطهٔ Q به نقطهٔ P بی‌نهایت نزدیک شود $(\Delta x \to 0)$، خط مستقیم Δ به چه نوع خط مستقیم تبدیل می‌گردد؟ در شکل جداگانه نشان دهید.
- لیمت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ را در صورتی که $\Delta x \to 0$ کند، در نقطهٔ $P(x_0, f(x_0))$ تحقیق نمایید.



نتیجهٔ فعالیت فوق را به طور زیر بیان می‌نماییم:

مشتق منحنی تابع $f(x)$ در نقطهٔ $P(x_0, f(x_0))$ عبارت از میل مماس در این نقطه است؛ یعنی:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \tan\alpha = \tan\theta = m_\Delta$$

تعریف: میل مماس در نقطهٔ تماس منحنی عبارت از مشتق همان تابع در همان نقطه می‌باشد؛ یا به عبارت دیگر، تانجانت زاویه‌یی است که مستقیم Δ با جهت مثبت محور x می‌سازد.

مثال 1: میل و معادلهٔ مماسی را دریابید که با منحنی تابع $f(x)=2x^3-1$ در نقطهٔ $A(1,1)$ ترسیم می گردد.

حل: می‌دانیم که $m=\tan\alpha=f'(x)$ است؛ پس می‌توانیم بنویسیم که:

$$f(x)=2x^3-1$$
$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(x+\Delta x)^3-1-(2x^3-1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2[x^3+3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+(\Delta x)^3]}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x^3+6x^2\Delta x+6x(\Delta x)^2+2(\Delta x)^3-1-2x^3+1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x[6x^2+6x\Delta x+2(\Delta x)^2]}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}[6x^2+6x(\Delta x)+(\Delta x)^2]=6x^2$$

از اینرو میل مماس در نقطهٔ $A(1,1)$ عبارت است از:

$$m=f'(x)=f'(1)=6x^2=6\cdot 1^2=6$$

پس معادلهٔ مماس آن عبارت است از:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-1=6(x-1)\Rightarrow\ y=6x-5$$

مثال 2: میل مماس تابع $y=x^2+1$ را در نقطهٔ $x_0=2$ نشان دهید.

حل:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2+1-(x_0^2+1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0^2+2(\Delta x)x_0+(\Delta x)^2+1-x_0^2-1}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x[(2x_0+(\Delta x)]}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}[2x_0+(\Delta x)]=2x_0$$
$$m=y'=2x_0=2\cdot 2$$
$$y'=m=4$$

مثال 3: مشتق تابع $y=f(x)=x^2$ را در نقطهٔ $x=x_0$ و به‌طور خاص در نقطهٔ $x_0=2$ دریابید.

$$x=x_0$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x_0\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x(2x_0+\Delta x)}{\Delta x}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x_0+\Delta x$$

حالا از روش پیدا کردن لیمت استفاده می‌کنیم: $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x)=2x_0$ چون $x_0=2$ است؛ پس $f'(2)=2\cdot 2=4$ ؛ یعنی در نقطهٔ $x_0=2$ مشتق اول تابع $y=f(x)=x^2$ مساوی به 4 است. این بدین معنی است که 4 میل مستقیم در نقطهٔ $x_0=2$ است.

مثال 4: مشتق تابع $f(x)=x^3$ را دریابید.

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)^3-x_0{}^3}{\Delta x}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0{}^3+3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x_0{}^3}{\Delta x}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x[3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x^2)]}{\Delta x}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=3x_0^2+3x_0(\Delta x)+(\Delta x^2)$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}[3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x)^2]=3x_0^2$$

پس مشتق تابع $f(x)$ در نقطهٔ x_0 مساوی به $f'(x_0)=3x_0^2$ است.

مثال 5: در نقطهٔ x_0 مشتق تابع $f(x)=\dfrac{1}{x}$ را دریابید؟

ثبوت:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
$$f(x_0)=\frac{1}{x_0}$$
$$f(x_0)+\Delta y=\frac{1}{x_0+\Delta x}$$
$$\Delta y=\frac{1}{x_0+\Delta x}-f(x_0)$$
$$\Delta y=\frac{1}{x_0+\Delta x}-\frac{1}{x_0}$$
$$\Delta y=\frac{x_0-(x_0+\Delta x)}{x_0(x_0+\Delta x)}$$

اطراف رابطهٔ فوق را تقسیم بر Δx می‌کنیم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\dfrac{x_0-x_0-\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\dfrac{-\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-\Delta x}{\Delta x\cdot x_0(x_0+\Delta x)}\Rightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)}$$
$$f'(x_0)=\frac{-1}{x_0(x_0+0)}=\frac{-1}{x_0^2}$$

بنابرین مشتق تابع $f(x)$ در نقطهٔ x_0 مساوی به $f'(x_0)=-\dfrac{1}{x_0^2}$ است.

تمرین

1- مشتق توابع زیر را دریابید؟

1) $f(x)=5x^2-2$ 2) $f(x)=\dfrac{2}{x}$

2- مشتق توابع زیر را در نقاط داده شده پیدا کنید؟

1) $f(x)=4x^2 \quad , \quad x_0=\dfrac{1}{2}$ 2) $f(x)=3x-1 \quad , \quad x_0=-1$

قوانین مشتق

آیا می‌توان مشتق تابع مقابل را بدون طریقهٔ تزاید پیدا کرد؟

$$f(x) = 2x^2$$

1. مشتق یک عدد ثابت:

فعالیت

تابع $y = C$ (C عدد ثابت) را در نظر بگیرید:

- متحول را به اندازهٔ Δx تزاید دهید، دربارهٔ تزاید تابع چه فکر می‌کنید؟
- نسبت تزاید تابع و متحول را تشکیل دهید.
- از اطراف مساوات فوق لیمت اخذ نمایید طوری‌که $\Delta x \to 0$ تقرب کند.

نتیجهٔ فعالیت فوق را به طور زیر بیان می‌نماییم:

هرگاه $y = C$ یک تابع ثابت باشد گراف آن یک خط افقی و میل آن صفر است؛ یعنی: میل مماس صفر بوده؛ که در حقیقت مشتق تابع ثابت صفر می‌باشد.

ثبوت:

$$\begin{aligned} y &= C \\ y + \Delta y &= C \\ \Delta y &= C - y \\ \Delta y &= C - C \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{C - C}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x}$$

$$y' = 0$$

مثال: مشتق تابع $f(x) = \pi^4$ و $f(x) = 100$ را دریابید.

حل: چون π^4 و 100 عددهای ثابت اند:

$$\begin{aligned} f(x) &= C & &\Rightarrow f'(x) = 0 \\ f(x) &= \pi^4 & &\Rightarrow f'(x) = 0 \\ f(x) &= 100 & &\Rightarrow f'(x) = 0 \end{aligned}$$

2. مشتق یک تابع طاقت‌دار:

فعالیت

تابع $y=x^n$ را که n عدد طبیعی و $n\geq 1$ باشد در نظر بگیرید.

- متحول را به اندازهٔ Δx تزاید دهید، آیا تابع نیز تزاید می‌نماید یا خیر؟ اگر می‌نماید، به‌کدام اندازه؟ رابطهٔ آنرا بنویسید.
- از این رابطه قیمت Δy را دریافت و نسبت تزاید تابع و متحول را تشکیل دهید.
- از اطراف مساوات فوق در صورتی لیمت بگیرید که $\Delta x\to 0$ کند.

نتیجهٔ فعالیت فوق را به طور زیر ثبوت می‌نماییم:

ثبوت:

$$y=x^n$$

$$y+\Delta y=(x+\Delta x)^n \quad \Rightarrow \quad \Delta y=(x+\Delta x)^n-y$$

$$\Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n$$

$$\Delta y=(x+\Delta x-x)[(x+\Delta x)^{n-1}+(x+\Delta x)^{n-2}x+(x+\Delta x)^{n-3}x^2+\ldots+x^{n-1}]$$

$$\Delta y=\Delta x[(x+\Delta x)^{n-1}+(x+\Delta x)^{n-2}x+(x+\Delta x)^{n-3}x^2+\ldots+x^{n-1}]$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x[(x+\Delta x)^{n-1}+(x+\Delta x)^{n-2}x+(x+\Delta x)^{n-3}x^2+\ldots+x^{n-1}]}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[(x+\Delta x)^{n-1}+(x+\Delta x)^{n-2}x+(x+\Delta x)^{n-3}x^2+\ldots+x^{n-1}\right]$$

$$y'=\underbrace{x^{n-1}+x^{n-1}+x^{n-1}+\ldots+x^{n-1}}_{n \text{ دفعه } x^{n-1}}$$

$$y'=nx^{n-1}$$

مثال 1: مشتق تابع $f(x)=x^5$ را در نقطهٔ $x=\frac{1}{2}$ دریابید.

حل:

$$f(x)=x^5 \Rightarrow f'(x)=5x^{5-1} \Rightarrow f'(x)=5x^4$$

$$f'(\frac{1}{2})=5\cdot(\frac{1}{2})^4=5\cdot\frac{1}{16}=\frac{5}{16}$$

تمرین

مشتق توابع زیر را دریابید؟

1) $f(x)=x^{-2}$ 2) $x(t)=gt^2$ 3) $t(x)=x^8$

4) $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ 5) $f(x)=10^{10}$

3. مشتق حاصل جمع:

فعالیت

توابع مشتق‌پذیر u و v را در نظر بگیرید:

- آیا تابع $y=u+v$ هم مشتق‌پذیر است؟
- در تابع $y=u+v$، u را به اندازهٔ Δu و v را به اندازهٔ Δv تزاید دهید، در مورد تزاید تابع y چه فکر می‌کنید؟ اندازهٔ آن را بنویسید؟
- ابتدا تزاید تابع را دریافت کرده و اطراف مساوات را به Δx تقسیم کنید و سپس لیمت آن‌را در صورتی دریابید که $\Delta x \to 0$ کند.

نتیجهٔ فعالیت فوق را به طور زیر ثبوت می‌نماییم:

ثبوت:

$$y=u+v$$
$$y+\Delta y=u+\Delta u+v+\Delta v$$
$$\Delta y=u+\Delta u+v+\Delta v-y$$
$$\Delta y=u+\Delta u+v+\Delta v-u-v$$
$$\Delta y=\Delta u+\Delta v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u+\Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

چون $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'$ و $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=v'$ است؛ $y'=u'+v'$

4. مشتق حاصل تفریق:

اگر $y=u-v$ باشد، پس $y'=u'-v'$ است.

ثبوت آن کارخانه‌گی شاگردان است.

مثال 1: مشتق تابع $y=2x+1$ را دریابید.

حل: دیده می‌شود که $u=2x$ و $v=1$ است؛ پس:

$$u' = 1 \cdot 2x^{1-1} = 2x^0$$
$$u' = 2$$
$$v' = 0$$

لذا: $y' = u' + v' \Rightarrow y' = (2x)' + (1)' \Rightarrow y' = 2 + 0 \Rightarrow y' = 2$

مثال 2: مشتق تابع $y = 4x^2 - 3x + 5$ را دریابید.

حل: در این تابع $u = 4x^2$, $v = 3x$ و $w = 5$ است که $u' = 8x$, $v' = 3$ و $w' = 0$ می‌باشد؛ بنابرین:

$$y' = u' + v' + w'$$
$$y' = (4x^2)' - (3x)' + (5)'$$
$$y' = 8x - 3$$

مثال 3: مشتق توابع زیر را دریابید.

1) $y = 12x - 7$
$y' = (12x)' - (7)'$
$y' = 12$

2) $f(x) = 9x^2 - 12x + 4$
$f'(x) = (9x^2)' - (12x)' + (4)'$
$f'(x) = 18x - 12$

3) $f(x) = 6x^3 - 2x^2 + 6x - 1$
$f'(x) = (6x^3)' - (2x^2)' + (6x)' - (1)'$
$f'(x) = 18x^2 - 4x + 6$

5. مشتق حاصل ضرب:

اگر توابع u و v مشتق‌پذیر باشند، پس $u \cdot v$ هم مشتق‌پذیر است ازین‌رو تابع $y = u \cdot v$ را در نظر بگیرید.

- در تابع فوق u را به اندازهٔ Δu ، v را به اندازهٔ Δv تزاید دهید و تزاید تابع را دریابید.
- بعد از پیدا کردن تزاید تابع یعنی Δy اطراف مساوات را به Δx تقسیم نمایید.
- از رابطهٔ فوق در صورتی لیمت بگیرید که $\Delta x \to 0$ کند.

نتیجهٔ فعالیت فوق را به‌طور زیر ثبوت می‌نماییم:

ثبوت:

$$y = u \cdot v$$
$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) \Rightarrow \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - y$$
$$\Delta y = u \cdot v + u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v - u \cdot v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x} = v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = v \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$y' = v \cdot u' + u \cdot v' + 0 \cdot v'$$
$$y' = u'v + v'u$$

مثال 1: مشتق تابع $y = x^3(x^2 - 3)$ را دریابید.

حل: می‌دانیم که تابع شکل $y = u \cdot v$ را دارد که در این‌صورت $y' = u'v + v'u$ می‌شود.

$$\left.\begin{array}{l} u = x^3 \;\Rightarrow\; u' = 3x^2 \\ v = x^2 - 3 \;\Rightarrow\; v' = 2x \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} y' = u'v + v'u \\ y = x^3(x^2 - 3) \\ y' = 3x^2(x^2 - 3) + 2x(x^3) \\ y' = 3x^4 - 9x^2 + 2x^4 = 5x^4 - 9x^2 \end{array}$$

مثال 2: مشتق تابع $y = (5x - 1)^2$ را دریابید.

حل: تابع y را می‌توانیم به شکل ضرب دو فکتور بنویسیم:

$$y = (5x - 1)^2 = (5x - 1)(5x - 1)$$

$$\left.\begin{array}{l} u = 5x - 1 \;\Rightarrow\; u' = 5 \\ v = 5x - 1 \;\Rightarrow\; v' = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} y' = u'v + v'u \\ y' = 5(5x - 1) + 5(5x - 1) \\ y' = 25x - 5 + 25x - 5 = 50x - 10 \end{array}$$

6. مشتق حاصل تقسیم:

اگر u و v دو تابع مشتق‌پذیر باشند؛ پس $\frac{u}{v}$ طوری‌که $v \neq 0$ باشد هم مشتق‌پذیر است اکنون تابع $y = \frac{u}{v}$ را در نظر می‌گیریم:

- u و v را به ترتیب به اندازهٔ $\Delta v, \Delta u$ تزاید دهید و در تابع $y = \frac{u}{v}$ تزاید y را دریابید.
- اطراف مساوات را به Δx تقسیم نمایید.
- از اطراف رابطهٔ فوق لیمیت اخذ نمایید در صورتی‌که $\Delta x \to 0$ کند.

نتیجهٔ فعالیت فوق را به طور زیر ثبوت می‌نماییم:

ثبوت:

$$y=\frac{u}{v} \Rightarrow y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} \Rightarrow \Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-y$$

$$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{uv+v\cdot\Delta u-uv-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)}$$

$$\Delta y=\frac{v\cdot\Delta u-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{v\cdot\Delta u-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)}}{\Delta x}=\frac{v\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}\right)=\frac{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v\cdot\lim\limits_{\Delta v\to 0}(v+\Delta v)}$$

$$y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$

مثال 1: مشتق تابع $y=\dfrac{2+3x}{1-2x}$ را دریابید.

حل: دیده می‌شود که تابع شکل $\dfrac{u}{v}$ را دارد که مشتق آن عبارت است از:

$$\left.\begin{array}{l} u=2+3x \Rightarrow u'=3 \\ v=1-2x \Rightarrow v'=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y=\dfrac{u}{v} \quad \Rightarrow y'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2} \\ y'=\dfrac{3(1-2x)-[-2(2+3x)]}{(1-2x)^2} \\ \quad =\dfrac{3-6x+4+6x}{(1-2x)^2}=\dfrac{7}{(1-2x)^2} \end{array}$$

یادداشت

هرگاه بخواهیم مشتق یک تابع را در یک نقطهٔ مشخص مانند x_0 دریافت نماییم، بعد از دریافت مشتق تابع داده شده قیمت نقطهٔ مشخصه را در آن وضع می‌نماییم، که مشتق تابع را در همان نقطه ارائه می‌نماید.

مثال 2: مشتق تابع $f(y)=\dfrac{2y^2-3}{1-3y}$ را در نقطهٔ $y=0$ دریابید.

حل: با استفاده از مشتق حاصل تقسیم داریم که:

$$f'(y)=\frac{4y(1-3y)-[-3(2y^2-3)]}{(1-3y)^2}=\frac{4y-12y^2+6y^2-9}{(1-3y)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} u=2y^2-3 \Rightarrow u'=4y \\ v=1-3y \Rightarrow v'=-3 \end{array}\right\}$$

$$f'(y)=\frac{-6y^2+4y-9}{(1-3y)^2}$$

$$f'(0)=\frac{-6(0)^2+4(0)-9}{(1-0)^2}$$

$$f'(0)=-9$$

مثال 3: مشتق تابع $f(t)=\dfrac{-3}{2t-1}$ را دریابید.

حل: می‌دانیم که تابع شکل $\dfrac{u}{v}$ را دارد، بنابرین از فارمول $y=\dfrac{u}{v}$ استفاده کرده چنین حل می‌نماییم:

$$y=\frac{u}{v} \quad \Rightarrow \quad y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} u=-3 \Rightarrow u'=0 \\ v=2t-1 \Rightarrow v'=2 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(t)=\frac{0\cdot(2t-1)-2(-3)}{(2t-1)^2}=\frac{6}{(2t-1)^2}$$

تمرین

مشتق توابع الجبری زیر را دریابید؟

1) $f(x)=\dfrac{3}{5}x(x-2)$ 2) $g(x)=(2x-3)(x-3)$ 3) $f(x)=(2x-1)^2$

4) $f(t)=\dfrac{t^2}{1-2t}$ 5) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2}$ 6) $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

7) $f(x)=3x^5-5x^2$ 8) $f(x)=7x+3$

7- مشتق جذر مربع یک تابع:

تابع $y=\sqrt{x}$ را در نظر بگیرید:

- در تابع فوق متحول را به اندازهٔ Δx تزاید داده و تزاید تابع را دریافت نمایید؟
- از هر دو طرف رابطهٔ به‌دست آمده به گونه‌یی لیمت اخذ نمایید که $\Delta x \to 0$ کند.

نتیجهٔ فعالیت فوق را به طور زیر ثبوت می‌نماییم:

ثبوت:

$$y=\sqrt{x} \Rightarrow y+\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}$$

$$\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}$$

صورت و مخرج طرف راست مساوات را ضرب مزدوج صورت می‌نماییم:

$$\Delta y=\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{x+\Delta x-x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} \Rightarrow \lim_{\Delta x\to o}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to o}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\boxed{y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

مثال 1: مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x}(x^2-1)$ را به‌دست آورید.

حل: دیده می‌شود که تابع شکل $u\cdot v$ را دارد:

$$\left.\begin{aligned} u=\sqrt{x} \Rightarrow u'=\frac{1}{2\sqrt{x}} \\ v=x^2-1 \Rightarrow v'=2x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} f'(x)&=\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2-1)+2x\cdot\sqrt{x} \\ f'(x)&=\frac{x^2-1}{2\sqrt{x}}+2x\sqrt{x}=\frac{x^2-1+4x(\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}} \\ &=\frac{x^2-1+4x^2}{2\sqrt{x}}=\frac{5x^2-1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

8- مشتق تابع $\sqrt{u}$:

فعالیت

- اگر y تابع u و u تابع x تغییری نیامده! و مشتق‌پذیر باشند، در مورد رابطهٔ y نظر به u و u نظر به x چه فکر می کنید؟
- متحول u را به اندازهٔ Δu تزاید داده و در مورد تزاید تابع Δy توضیح دهید.
- از هر دو طرف مساوات طوری لیمت بگیرید که $\Delta x \to 0$ کند.

$$y + \Delta y = \sqrt{u + \Delta u}$$
$$\Delta y = \sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u}$$

صورت و مخرج طرف راست مساوات را ضرب مزدوج صورت می‌نماییم:

$$\Delta y = \frac{(\sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u})(\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u})}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$
$$\Delta y = \frac{u + \Delta u - u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

اطراف مساوات را تقسیم Δx کرده و سپس از اطراف مساوات لیمت می گیریم، طوری‌که $\Delta x \to 0$ کند:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}} \cdot \frac{1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta u \to 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$
$$y' = \frac{u'}{\sqrt{u} + \sqrt{u}} = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

مثال 2: مشتق تابع $h(x) = (x^2 + x)(\sqrt{x})$ را دریابید.

حل: با استفاده از تابع $y = u \cdot v$ و $y = \sqrt{x}$ می‌توانیم بنویسیم:

$$\left.\begin{array}{l} u = x^2 + x \quad \Rightarrow u' = 2x + 1 \\ v = \sqrt{x} \Rightarrow v' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} h'(x) = (2x+1)\sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 + x) \\ h'(x) = 2x\sqrt{x} + \sqrt{x} + \dfrac{x^2 + x}{2\sqrt{x}} \\ h'(x) = \dfrac{4x^2 + 2x + x^2 + x}{2\sqrt{x}} = \dfrac{5x^2 + 3x}{2\sqrt{x}} \end{array}$$

مثال 3: مشتق تابع $f(x)=(\sqrt[3]{x}-1)(x+3)$ را در نقطهٔ $x=8$ به‌دست آورید.

حل: با استفاده از فورمول $y=u\cdot v$ و $y=\sqrt[n]{u}$ می‌توانیم این گونه عمل نماییم:

$$\left.\begin{array}{l} u=\sqrt[3]{x}-1 \Rightarrow u'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \\ v=x+3 \Rightarrow v'=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x+3)+1(\sqrt[3]{x}-1) \\ f'(x)=\dfrac{x+3}{3\sqrt[3]{x^2}}+(\sqrt[3]{x}-1) \end{array}$$

اکنون مشتق تابع را در نقطهٔ $x=8$ دریافت می‌داریم: $f'(8)=\dfrac{8+3}{3\sqrt[3]{8^2}}+\sqrt[3]{8}-1=\dfrac{11}{12}+1=\dfrac{23}{12}$

تمرین

1- مشتق توابع زیر را دریابید؟

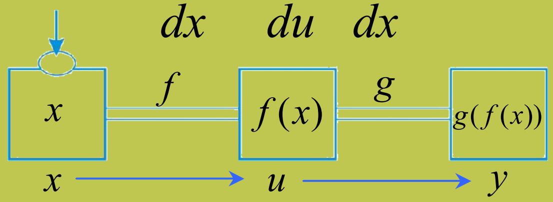
1) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ 2) $f(x)=3x^{-3}$ 3) $f(x)=x^2+3$

2- اگر $f(x)=x^2-3x$ و $g(x)=\sqrt{x}-1$ باشد؛ مشتق حاصل جمع، حاصل ضرب و حاصل تقسیم این دو تابع را دریابید. $[(f+g)',(f\cdot g)',(f\div g)' \quad g\neq 0]$

مشتق تابع مرکب(قاعدهٔ زنجیری) Chain Rule

در مورد رابطه و شکل مقابل نظر خود را بیان کنید.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$



فعالیت

اگر y تابع u و u تابع x و اشتقاق‌پذیر باشند.

- بگویید که y با u و u با x چه رابطه‌یی دارد؟
- آیا مساوات $\Delta y=\Delta y\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$ حقیقت دارد؟
- اطراف مساوات فوق را به Δx تقسیم نمایید؟
- اگر مخرج‌های کسرهای سمت راست با هم تبدیل گردند، در رابطهٔ فوق تغییر به میان می‌آید؟
- از اطراف رابطهٔ فوق طوری لیمت بگیرید که $\Delta x\to 0$ تقرب نماید؟

نتیجهٔ فعالیت فوق را به طور زیر ثبوت می‌نماییم:

مشتق تابع، تابع را ثبوت می‌کند و نتیجهٔ آن به گونهٔ زیر است:

ثبوت:

$$\Delta y=\Delta y\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

چون $\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=y'_{(u)}$ و $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'_{(x)}$ است: $\quad y'_{(x)}=y'_{(u)}\cdot u'_{(x)}$

بر اساس قاعدهٔ زنجیری، می‌توانیم نتایج زیر را بنویسیم:

1- اگر $y=u^n$ باشد؛ پس: $\quad y'=nu^{n-1}\cdot u'$

2- اگر $y=\sqrt[n]{u}$ باشد؛ پس: $y'=\dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$

مثال: مشتق توابع زیر را پیدا کنید؟

1) $y=(2x^2-1)^3$ 2) $y=\sqrt{1-x^2}$ 3) $y=(x^2-3)^2\cdot 2x^3$

4) $y=\sqrt[3]{x^2-2x^3}$ 5) $y=(x^2-2)^{-3}$

حل: با استفاده از قاعدهٔ زنجیری می‌توانیم بنویسیم که:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \ y=\underbrace{(2x^2-1)^3}_{u} \\ u=2x^2-1\Rightarrow u'_x=4x \\ y=u^3\Rightarrow y'_u=3u^2 \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l} y'_{(x)}=y'_{(u)}\cdot u'_{(x)} \\ y'=3(2x^2-1)^2\cdot 4x=3(4x^4-4x^2+1)\cdot 4x \\ \quad =(12x^4-12x^2+3)\cdot 4x=48x^5-48x^3+12x \\ \quad =12x(4x^4-4x^2+1)\quad =12x(2x^2-1)^2 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2)\ \ y=\sqrt{1-x^2} \\ u=1-x^2\ \Rightarrow\ u'_{(x)}=-2x \\ y=\sqrt{u}\Rightarrow y'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}} \end{array}\right\}\Rightarrow\quad y'=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

دیده می‌شود که تابع شکل یک حاصل ضرب را دارد؛ پس: $y=u\cdot v\ \Rightarrow\ y'=u'v+v'u$

$$\left.\begin{array}{l} 3)\ \ y=(x^2-3)^2\cdot 2x^3 \\ u=(x^2-3)^2 \\ u'_{(x)}=2(x^2-3)(2x) \\ v=2x^3\Rightarrow\ v'_{(x)}=6x^2 \end{array}\right\}\ \begin{array}{l} y'=\left[(x^2-3)^2\right]'\cdot 2x^3+\left[2x^3\right]'(x^2-3)^2 \\ y'=\left[2(x^2-3)\cdot 2x\right]2x^3+6x^2(x^2-3)^2 \\ \quad =8x^4(x^2-3)+6x^2(x^2-3)^2 \\ \quad =8x^6-24x^4+6x^2(x^4-6x^2+9) \\ \quad =8x^6-24x^4+6x^6-36x^4+54x^2 \\ \quad =14x^6-60x^4+54x^2 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 4)\ \ y=\sqrt[3]{x^2-2x^3} \\ u=x^2-2x^3 \\ u'_{(x)}=2x-6x^2 \end{array}\right\}\ \begin{array}{l} y=\sqrt[n]{u}\Rightarrow y'=\dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}} \\ y'=\dfrac{2x-6x^2}{3\sqrt[3]{(x^2-2x^3)^2}} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 5)\ \ y=(x^2-2)^{-3} \\ u=x^2-2 \\ u'_{(x)}=2x \end{array}\right\}\ \begin{array}{l} y=u^n\Rightarrow y'=nu^{n-1}\cdot u' \\ y'=-3(x^2-2)^{-4}\cdot 2x=\dfrac{-6x}{(x^2-2)^4} \end{array}$$

یادداشت:

I. هرگاه تابع f در نقطهٔ (x_0) مشتق‌پذیر باشد؛ پس $f'(x_0)$ میل مماس در نقطهٔ $(x_0\ ,\ f(x_0))$ است.

مثال: میل تابع $f(x)=x^3$ را در نقطهٔ $x_0=1$ پیدا کنید.

حل: چون $x_0=1$ است؛ پس $f(x_0)=1$ می‌شود و $P(1,1)$ نقطهٔ تماس می‌باشد که میل آن عبارت است از:

$$f'(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3 \quad\Rightarrow\quad f'(1)=3$$

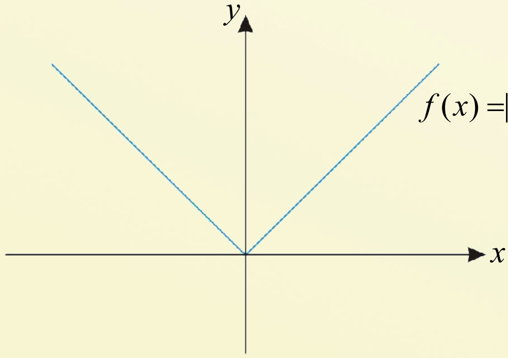
II. اگر تابع f در نقطهٔ $x=x_0$ مشتق‌پذیر باشد، این تابع در نقطه x_0 متمادی نیز است، اما عکس آن درست نیست؛ یعنی یک تابع می‌تواند در یک نقطه متمادی باشد، ولی در آن نقطه قابل اشتقاق نباشد.

مثال: مشتق تابع $f(x)=|x|$ را در نقطهٔ $x=0$ دریابید.

حل: می‌دانیم که مشتق در حقیقت دریافت لیمت نسبت تزاید متحول و تابع است، لذا لیمت‌های طرف چپ و راست(مشتقات طرف چپ و راست) آنرا در صفر مطالعه می کنیم.

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$$



دیده می‌شود که $f'(0^-) \neq f'(0^+)$ است؛ پس تابع f در نقطهٔ $x=0$ مشتق‌پذیر نیست، اما در صفر متمادی است.

تمرین

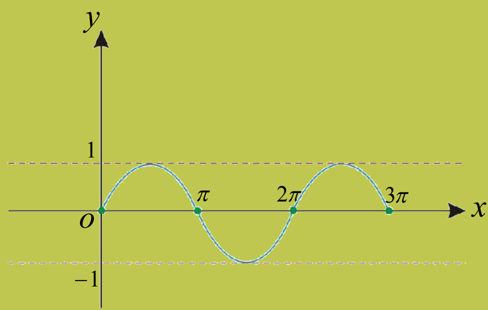
مشتق توابع زیر را به‌دست آورید؟

1) $y=(x^2+2)^2$ 2) $y=(x^3-4x^2+1)^{-4}$ 3) $y=(1-2x^3)^4$

4) $y=\sqrt{\dfrac{1-z}{1+z}}$ 5) $y=\sqrt[3]{3t+1}$ 6) $y=\dfrac{1}{\sqrt{2+x^2+x^3}}$

مشتق توابع مثلثاتی

گراف مقابل چه نوع تابعی را نشان می‌دهد؟



- دایرهٔ مثلثاتی و رادیان را تعریف نمایید؟
- رابطهٔ $-1 \leq \sin x \leq 1$ حقیقت دارد یا خیر؟
- تابع $y = \sin x$ را در نظر گرفته، متحول را به اندازهٔ Δx تزاید دهید و تزاید تابع را در نظر بگیرید؟
- رابطهٔ مثلثاتی $\sin(x + \Delta x) - \sin x$ را انکشاف دهید؟
- بعد از انکشاف رابطهٔ فوق، نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ را تشکیل داده و از اطراف مساوات طوری لیمت اخذ نمایید که $\Delta x \to 0$ کند؟

نتیجهٔ فوق را به طور زیر بیان و ثبوت می‌نماییم:

1– مشتق تابع $y = \sin x$:

ثبوت:

$$y = \sin x$$

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$

$$\Delta y = 2\cos\frac{x + \Delta x + x}{2} \cdot \sin\frac{x + \Delta x - x}{2} = 2\cos\frac{2x + \Delta x}{2} \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot 2\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2} = 2\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \sin\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \Rightarrow y'(x) = \cos x \cdot 1$$

$$y' = \cos x$$

$$\boxed{y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x}$$

اگر $y=\sin u$ و u تابع x باشد، می‌توانیم بنویسیم که: $f(u)=\sin u \Rightarrow y'=u'\cos u$

مثال 1: مشتق تابع $y=f(x)=\sin 4x$ را به‌دست آورید.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\sin 4x \\ u=4x \Rightarrow u'=4 \\ f(x)=\sin u \Rightarrow y'_u=\cos u \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(x)=\sin u \quad \Rightarrow f'(x)=u'\cos u \\ f(x)=\sin 4x \Rightarrow f'(x)=4\cos 4x \end{array}$$

مثال 2: مشتق تابع $y=x^3\cdot\csc x$ را به‌دست آورید.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3\cdot\csc x=x^3\cdot\dfrac{1}{\sin x} \\ u=x^3 \Rightarrow u'=3x^2 \\ v=\dfrac{1}{\sin x} \Rightarrow v'=\dfrac{-uv'}{v^2}=\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(x)=x^3\cdot\csc x \\ f'(x)=3x^2\cdot\csc x+\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}\cdot x^3 \\ \qquad =3x^2\csc x-x^3\cot x\cdot\csc x \\ \qquad =3x^2\csc x-x^3\cot x\cdot\csc x \end{array}$$

تمرین

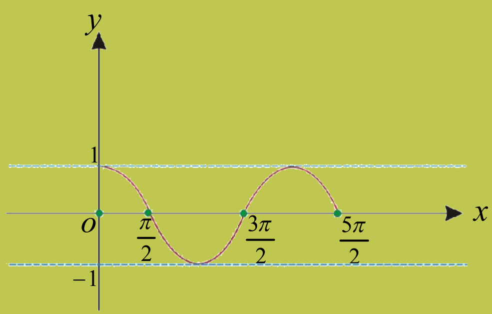
مشتق توابع زیر را دریابید:

$a)\ y=\sin 5x$ $\qquad$ $b)\ y=\dfrac{\sin x}{1+x}$

$c)\ y=\sqrt{1+\sin x}$

مشتق تابع مثلثاتی cos x

گراف مقابل چه نوع تابعی را نشان می‌دهد؟



- درتابع $y = f(x) = \cos x$ متحول را به اندازهٔ Δx و بالمقابل تابع را به اندازهٔ Δy تزاید دهید؟
- رابطهٔ مثلثاتی $\cos(x+\Delta x) - \cos x$ را انکشاف دهید؟
- بعد از انکشاف رابطهٔ فوق نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ را تشکیل دهید و از اطراف لیمت بگیرید به گونه‌یی که $\Delta x \to 0$ کند.

نتیجهٔ فعالیت فوق را به طور زیر بیان و ثبوت می‌نماییم:

2- مشتق تابع $y = \cos x$:

ثبوت:

$$y = \cos x$$

$$y + \Delta y = \cos(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \cos(x+\Delta x) - \cos x$$

$$\Delta y = -2\sin\frac{x+\Delta x + x}{2}\cdot \sin\frac{x+\Delta x - x}{2}$$

$$\Delta y = -2\sin\frac{2x+\Delta x}{2}\cdot \sin\frac{\Delta x}{2}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x\to 0}\sin(x+\frac{\Delta x}{2})\cdot \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x\cdot 1$$

$$\boxed{y = \cos x \quad \Rightarrow \quad y' = -\sin x}$$

یا به گونه مختصر آنرا چنین ثبوت می نماییم:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

$$(\cos x)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} \cdot (-2\sin x \cos x)$$

می‌دانیم که $\sqrt{1-\sin^2 x} = \cos x$ است:

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos x} (-2\sin x \cdot \cos x)$$

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

اگر $y = \cos u$ و u تابع x باشد، می‌توانیم بنویسیم که:

$$\boxed{y = \cos u \Rightarrow y' = -u' \cdot \sin u}$$

مثال 1: مشتق توابع زیر را به‌دست آورید؟

1) $f(x) = \sin 2x = 2\sin x \cos x$ 2) $f(x) = x - \sin x \cos x$

حل: می‌دانیم که $y = u \cdot v \Rightarrow y' = u'v + v'u$ است:

1) $f(x) = \sin 2x = 2\sin x \cos x$

$$f'(x) = (2\sin x)' \cos x + (\cos x)' \cdot 2\sin x = 2\cos^2 x - 2\sin^2 x$$

$$f'(x) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) \Rightarrow y' = 2\cos 2x$$

2) $f(x) = x - \sin x \cos x$

$$f'(x) = (x)' - (\sin x \cdot \cos x)' = (x)' - [(\sin x)' \cdot \cos x + (\cos x)' \sin x]$$

$$f'(x) = (x)' - [\cos x \cos x + (-\sin x \sin x)] = 1 - \cos 2x$$

تمرین

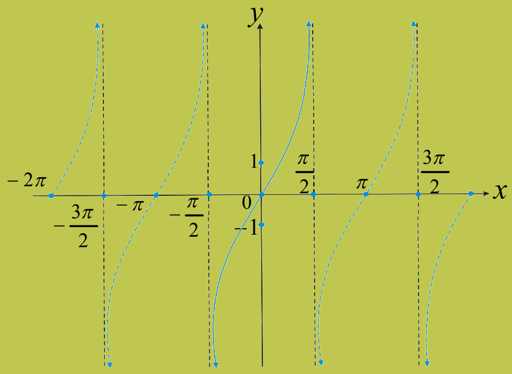
مشتق مرتبهٔ اول توابع زیر را دریابید؟

1) $f(x) = (\sec 2x + \tan 2x)^2$ 2) $f(x) = \sin^2 x$ 3) $f(x) = \sec x$

4) $f(x) = \csc x$ 5) $f(x) = \dfrac{5\sin^2 2x}{3\cos 5x}$

مشتق تابع مثلثاتی y = tanx

گراف مقابل چه نوع تابعی را نشان می‌دهد؟



- تابع $y = \tan x$ را به شکل نسبت مثلثاتی بنویسید؟
- اگر از هر دو طرف نسبت فوق مشتق بگیریم، مساوی به چه می گردد؟

نتیجهٔ فعالیت فوق را چنین ثبوت می‌نماییم:

3– مشتق تابع مثلثاتی $y = \tan x$:

ثبوت:

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$f'(x) = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x)(\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y = \tan x$$

$$y'_{(x)} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

مشتق توابع متباقی را شاگردان ثبوت نمایند.

مثال1:مشتق توابع مثلثاتی زیر را دریابید.

$$y = \tan^3 x$$

حل: می‌دانیم که $y = u^n$ است؛ پس مشتق آن $y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$ می‌باشد:

$$\left.\begin{array}{l} u = \tan x \\ u' = \sec^2 x \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y = \tan^3 x \\ y' = 3\tan^2 x \sec^2 x \end{array}$$

مثال2: مشتق تابع $y=\sec x\cdot\cot x$ را دریابید.

حل: چون‌که تابع شکل $y=u\cdot v$ را دارد؛ پس $y'=u'\cdot v+u\cdot v'$ است.

$$y=\sec x\cdot\cot x$$
$$u=\sec x \quad\Rightarrow\quad u'=\sec x\tan x$$
$$v=\cot x \quad\Rightarrow\quad v'=-\csc^2 x$$

قیمت‌های u',v,u و v' را در فورمول $y'=u'\cdot v+u\cdot v'$ وضع می کنیم:

$$y'=\sec x\tan x\cdot\cot x+\sec x(-\csc^2 x)$$
$$=\sec x\tan x\frac{1}{\tan x}-\csc^2 x\sec x$$
$$=\sec x-\csc^2 x\sec x$$

تمرین

مشتق توابع زیر را دریابید؟

$a)\ \ y=\tan x\cot x$

$b)\ \ y=(x^2+x-1)\tan^2 x$

$c)\ \ y=\dfrac{1}{\tan x}$

$d)\ \ y=\tan x\sec x-\cot x$

مشتقات ضمنی

مساوات مقابل را به شکل عبارت بنویسید؟

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}$$

فعالیت

- مشتق تابع $y = 2x^2 - 4$ را دریابید؟
- تابع $y^2 + xy = 1$ تابعی چندمتحوله بوده و گراف آن چه شکلی دارد؟
- مشتق تابع فوق را دریابید.

نتیجهٔ فعالیت فوق را چنین بیان می‌نماییم:

چون معادلهٔ یک خط منحنی در سیستم کمیات وضعیه عبارت از $y = f(x)$ است، از این جا $y - f(x) = 0$ گردیده و $y - f(x)$ یک تابع دو متحوله از جنس x و y می‌باشد. اگر $F(x,y) = y - f(x)$ را در نظر بگیریم، معادلهٔ این منحنی شکل $F(x,y) = 0$ را به‌خود می‌گیرد؛ به‌طور مثال اگر $F(x,y) = x^2 + y^2 - 25$ باشد؛ پس از معادلهٔ $F(x,y) = 0$ می‌توانیم بنویسیم $x^2 + y^2 - 25 = 0$ یا $x^2 + y^2 = 25$ که معادلهٔ این دو تابع مختلف عبارت است از: $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$

به‌صورت عموم معادلهٔ $F(x,y) = 0$ می‌تواند معادلهٔ چندین تابع به شکل $y = f(x)$ باشد.

در تابع $y = f(x)$ که x و y آنها از هم جدا باشد؛ مشتق آن به آسانی دریافت می‌گردد. اما در بعضی از روابط x با y یکجا می‌باشد؛ مانند: $xy^2 - y + 1 = 0$ که در مشتق گرفتن آن اگر از جنس x مشتق بگیریم y را یک عدد ثابت فرض می‌نماییم و اگر از جنس y مشتق بگیریم، x را عدد ثابت فرض می‌کنیم؛ مانند:

$$xy^2 - y + 1 = 0$$

$$(xy^2)' - (y)' + (1)' = 0 \Rightarrow 1y^2 + x(2y'y) - y' = 0 \Rightarrow y^2 = -2xyy' + y' = y'(-2xy + 1)$$

$$y' = \frac{y^2}{-2xy + 1}$$

به‌صورت عمومی اگر رابطهٔ ضمنی به شکل $f(x,y)=0$ تعریف شده باشد، و تابع غیر صریح باشد به این معنا که متحول مستقل و متحول تابع در آن آشکار نباشد. مشتق این نوع توابع به نام مشتق ضمنی یاد می‌گردد و مشتق آن را طور زیر محاسبه می‌نماییم:

$$y'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{\text{مشتق تابع نظر به x (y ثابت است)}}{\text{مشتق تابع نظر به y (x ثابت است)}}$$

مثال 1: مشتق ضمنی y را نظر به x در تابع $y=\sin\frac{x}{y}+1$ در نقطهٔ $(\pi,1)$ به‌دست آورید.

حل: از رابطه $y-\sin\frac{x}{y}-1=0$ ، $y'_{(x)}=\frac{-f'_{(x)}}{f'_{(y)}}$ را دریافت می‌نماییم:

$$y-\sin\frac{x}{y}-1=0$$

$$\left.\begin{aligned}
f'_{(x)}&=y'_x-(\sin\frac{x}{y})'_x-(1)'_x\\
&=0-\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}-0=\frac{-1}{y}\cos\frac{x}{y}\\
f'_{(y)}&=y'_y-(\sin\frac{x}{y})'_y-(1)'_y\\
&=1-\cos\frac{x}{y}(\frac{x}{y})'_y-0=1-\frac{-x}{y^2}\cdot\cos\frac{x}{y}=1+\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}
\end{aligned}\right\}\Rightarrow y'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{\frac{-1}{y}\cos\frac{x}{y}}{1+\frac{x}{y^2}\cdot\cos\frac{x}{y}}$$

حال در رابطهٔ $y'_{(x)}$، قیمت x و y را وضع و $y'(\pi,1)$ را دریافت می‌نماییم:

$$y'_{(\pi,1)}=\frac{\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}}{1+\frac{x}{y^2}\cdot\cos\frac{x}{y}}=\frac{\frac{1}{1}\cos\pi}{1+\frac{\pi}{1}\cos\pi}=\frac{-1}{1+\pi(-1)}=\frac{1}{\pi-1}$$

مثال 2: مشتق ضمنی $x^2y+2y^3=3x+2$ را دریابید.

$$x^2y+2y^3=3x+2$$
$$x^2y+2y^3-3x-2=0$$
$$f'_{(x)}=2xy+0-3-0=2xy-3$$
$$f'_{(y)}=x^2+6y^2-0-0=x^2+6y^2$$
$$f'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{2xy-3}{x^2+6y^2}=\frac{3-2xy}{x^2+6y^2}$$

مثال3: مشتق ضمنی تابع $y^6 - y - x^2 = 0$ را دریابید؟

$$f'_{(x)} = -2x$$
$$f'_{(y)} = 6y^5 - 1$$
$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{-2x}{6y^5 - 1} = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

ویا به طریقۀ دیگر:

$$y^6 - y - x^2 = 0$$
$$6y^5 y' - y' - 2x = 0$$
$$(6y^5 - 1)y' = 2x$$
$$y' = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

مشتق دوم ضمنی تابع

جهت به دست آوردن مشتق دوم رابطۀ ضمنی، ابتدا مشتق اول آن‌را دریافت می‌کنیم و بعد از این رابطه دوباره مشتق می‌گیریم.

مثال1: در رابطۀ $x^2 - y^2 = 1$ مشتق دوم ضمنی $y''_{(x)}$ را دریابید.

حل:

$$x^2 - y^2 = 1$$
$$x^2 - y^2 - 1 = 0$$
$$f'_{(x)} = (x^2)'_x - (y^2)'_x - (1)'_x = 2x - 0 - 0 = 2x$$
$$f'_{(y)} = (x^2)'_y - (y^2)'_y - (1)'_y = 0 - 2y - 0 = -2y$$
$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{2x}{-2y} = \frac{x}{y}$$

یا به طریقۀ دیگر: $$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{(x^2)'_x - (y^2)'_x - (1)'_x}{(x^2)'_y - (y^2)'_y - (1)'_y} = -\frac{2x - 0 - 0}{0 - 2y - 0} = \frac{x}{y} \Rightarrow y'_{(x)} = \frac{x}{y}$$

حال از رابطۀ $y' = \frac{x}{y}$ مشتق دوم ضمنی را می‌گیریم:

$$y''_{(x)} = \frac{(x)'y - y'x}{y^2} = \frac{y - y'x}{y^2} = \frac{y - \frac{x}{y} \cdot x}{y^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^3} = \frac{-1}{y^3} \Rightarrow y''_{(x)} = \frac{-1}{y^3}$$

مثال2: مشتق ضمنی $x^2+xy+y^2-3=0$ را به‌دست آورده، سپس میل مماس را در نقطهٔ $(1,1)$ دریافته و معادلهٔ آن را بنویسید.

حل: چون نقطهٔ $(1,1)$ در معادله صدق می‌کند و این نقطه بالای منحنی قرار دارد، برای محاسبهٔ $y'_{(x)}$ در معادلهٔ داده شده می‌توان نوشت:

$$f'_{(x)}=2x+y$$
$$f'_{(y)}=x+2y$$
$$y'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{2x+y}{x+2y} \quad , \qquad x+2y\neq 0$$
$$y'=-\frac{2x+y}{x+2y}=-\frac{2+1}{1+2}=-1$$
$$y-y_1=m(x-x_1) \ \Rightarrow \ y-1=-(x-1) \ \Rightarrow \ y=-x+2$$

و یا به شکل زیر نیز می‌توان مشتق ضمنی تابع را دریافت کرد:

$$x^2+xy+y^2-3=0$$
$$2x+y+x\cdot y'+2yy'=0$$
$$2x+y+(x+2y)y'=0$$
$$(x+2y)y'+2x+y=0$$
$$(x+2y)y'=-2x-y$$
$$y'=\frac{-2x-y}{x+2y}$$

مثال3: مشتق ضمنی تابع $x^2y^3=5y^3+x$ را دریابید.

حل:

$$x^2y^3-5y^3-x=0$$
$$f'_{(x)}=2xy^3-0-1=2xy^3-1$$
$$f'_{(y)}=3x^2y^2-15y^2-0$$
$$y'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{2xy^3-1}{3x^2y^2-15y^2}=\frac{1-2xy^3}{3x^2y^2-15y^2}$$

تمرین

1. مشتق ضمنی تابع غیر صریح $x\sin y+y\cos x=5$ را دریابید؟
2. از رابطهٔ $x^3+xy^2+y=3$ مشتق ضمنی بگیرید؟
3. از رابطهٔ $x^2+y^2=4x+4y$ مشتق ضمنی بگیرید؟

مشتقات مرتبه بلند

از تابع مقابل، سه مرتبه مشتق بگیرید. $f(x) = \sin x$

از تابع مقابل، پنج مرتبه مشتق بگیرید. $f(x) = \cos x$

فعالیت

- مشتق تابع $y = 2x^4 - 3x^3 - 2x - 1$ را دریابید؟
- مشتق دوم تابع فوق را به‌دست آورید؟
- مشتق سوم تابع فوق را به‌دست آورید؟
- چند مرتبه از تابع داده شده می‌توان مشتق گرفت؟
- مشتق چندم تابع مذکور مساوی به صفر است؟

نتیجهٔ فعالیت فوق را به طور زیر بیان می‌نماییم:

هرگاه تابع $y = f_{(x)}$ مشتق‌پذیر باشد، مشتق مرتبهٔ اول آن $y' = f'_{(x)}$ و مشتق مرتبهٔ دوم آن $y'' = f''_{(x)}$ و مشتق مرتبهٔ سوم آن $y''' = f'''_{(x)}$ ... است. به شکل کلی، مشتق مرتبهٔ n-ام تابع $y = f_{(x)}$ را به علامت $y^{(n)} = f^{(n)}_{(x)}$ نشان می‌دهیم.

مثال 1: مشتق سوم تابع $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ را به‌دست آورید.

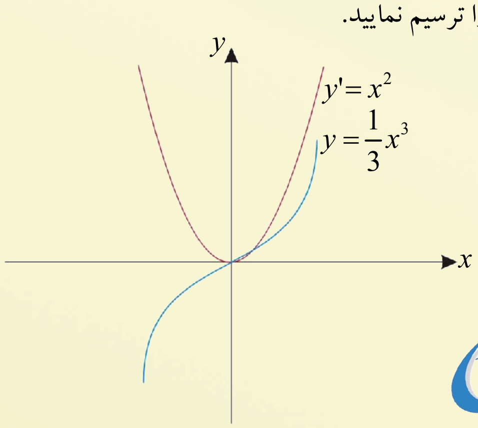
حل:

$$y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$$
$$y' = 3x^2 - 6x + 4$$
$$y'' = 6x - 6$$
$$y''' = 6$$

مثال 2: گراف تابع $y = \frac{1}{3}x^3$ و گراف تابع مشتق اول آن‌را ترسیم نمایید.

حل:

$$y = \frac{1}{3}x^3$$
$$y' = \frac{3}{3}x^2 = x^2$$
$$y' = x^2$$



مثال3: تابع $y=\sin x+\cos x$ داده شده است. ابتدا مشتق نهم آن‌را دریافت کرده و سپس مشتق حاصل جمع مربع مشتق نهم و y^2 را محاسبه کنید؛ یعنی $(y^{(9)})^2+y^2=2$

حل: ابتدا مشتق مرتبهٔ نهم $y^{(9)}$ را محاسبه می‌نماییم:

$$y=\sin x+\cos x$$
$$y'_{(x)}=\cos x+(-\sin x)=\cos x-\sin x$$
$$y''_{(x)}=-\sin x-(\cos x)=-\sin x-\cos x$$
$$y'''_{(x)}=-\cos x-(-\sin x)=\sin x-\cos x$$
$$\vdots$$
$$f'^{(9)}_{(x)}=\cos x-\sin x$$
$$\begin{aligned}(y^{(9)})^2+y^2&=(\cos x-\sin x)^2+(\sin x+\cos x)^2\\&=\cos^2 x-2\sin x\cos x+\sin^2 x+\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x\\&=2\sin^2 x+2\cos^2 x=2(\sin^2 x+\cos^2 x)=2\end{aligned}$$

مثال4: مشتق مرتبهٔ پنجم تابع $y=2x^6-3x^5-2x^3-3x^2-1$ را به‌دست آورید.

حل:

$$y=2x^6-3x^5-2x^3-3x^2-1$$
$$y'=12x^5-15x^4-6x^2-6x$$
$$y''=60x^4-60x^3-12x-6$$
$$y'''=240x^3-180x^2-12$$
$$y^{(4)}=720x^2-360x$$
$$y^{(5)}=1440x-360$$

یادداشت: هرگاه تابع چندجمله‌یی $c_n\neq 0$ $\quad f_{n(x)}=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ \dots\ +c_nx^n$ داده شده باشد، مشتق $n-$ام آن به طور زیر به‌دست می‌آید:

$$f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ \dots\ +c_nx^n \qquad c_n\neq 0$$
$$f'(x)=c_1+2c_2x+3c_3x^2+\ \dots\ +nc_nx^{n-1}$$
$$f''(x)=2c_2+6c_3x+\ \dots\ +n(n-1)c_nx^{n-2}$$
$$f'''(x)=6c_3+12c_4x+\ \dots\ +n(n-1)(n-2)c_nx^{n-3}$$
$$f^n(x)=n(n-1)(n-2)x\ \dots\ c_n=n!c_n$$

به صورت عمومی اگر $k>n$ باشد: $f^k(x)=0$

تمرین

1- از توابع زیر آنجا تا وقتی مشتق بگیرید که مشتق آن‌ها صفر گردد.

1) $y=4x^4-3x^3-2x$ $\qquad$ 2) $y=(5x-2)^3$

3) $y=a+b+c^2-x-ax-bx-cx^3-c^3x$ $\qquad$ 4) $y=\sin x$

- هرگاه نقاط $P(x,f(x))$ و $Q(x+\Delta x,f(x+\Delta x))$ دو نقطهٔ کیفی تابع $f(x)$ باشند. رابطهٔ زیر به‌نام خارج قسمت Newton یاد می‌شود.

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{x+\Delta x-x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

- میل مماس بالای هر منحنی در یک نقطهٔ کیفی عبارت است از: $m_T=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

- **مشتق یک تابع:** لیمت نسبت تغییرات تابع و متحول طوری‌که $\Delta x\to 0$ تقرب کند، به‌نام مشتق تابع یاد می شود و به $f'(x)$ یا $\frac{dy}{dx}$ نشان داده می‌شود.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)=y'$$

- هرگاه تابع $f(x)$ در نقطهٔ (x_0) قابل اشتقاق باشد؛ $f'(x)$ میل مماس با منحنی در نقطهٔ $(x_0,f(x_0))$ است.

- هرگاه تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=x_0$ قابل اشتقاق باشد؛ تابع در نقطهٔ x_0 متمادی است و برعکس آن درست نیست. اما ممکن است که تابع در یک نقطه متمادی باشد، اما در آن نقطه قابل اشتقاق نباشد.

- مشتق تابع $f(x)$ بالای منحنی C در نقطهٔ $P(x_0,f(x_0))$ مساوی به میل مماس است.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'=\tan\alpha=\tan\theta=m_\Delta$$

- میل مماس یک منحنی در نقطهٔ تماس به‌نام مشتق تابع در همان نقطه یاد می‌شود.

- هرگاه مشتق یک تابع گرفته شود، تابعی که به دست می‌آید به‌نام تابع مشتق یاد می‌شود.

- هرگاه تابع f در فاصلهٔ $(x_0-r\ ,\ x_0+r)$ و در اطراف نقطهٔ $x_0=x$ تعریف شده و لیمت آن موجود باشد در این حالت می توانیم یک خط مماس بالای منحنی تابع f در نقطهٔ $x=x_0$ ترسیم کنیم. میل این مماس عبارت است از: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

قوانین مشتق:

1) $f(x)=C \quad \Rightarrow \quad f'(x)=0$

2) $f(x)=x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x)=n\cdot x^{n-1}$

3) $f(x)=u\pm v \quad \Rightarrow \quad f'(x)=u'\pm v'$

4) $f(x)=u\cdot v \quad \Rightarrow \quad f'(x)=u'v+v'u$

5) $f(x)=\dfrac{u}{v} \quad , \quad v\neq 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$

6) $f(x)=\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

7) $f(x)=\sqrt{u} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

8) $f(x)=\sqrt[n]{u} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{u'}{n\cdot\sqrt[n]{u^{n-1}}}$

مشتق توابع مرکب: $y'_{(x)}=y'_{(u)}\cdot u'_{(x)}$

مشتق توابع مثلثاتی:

1) $y=\sin x \quad \Rightarrow \quad y'=\cos x \qquad , \qquad y=\sin u \quad \Rightarrow \quad y'=u'\cos u$

2) $y=\cos x \quad \Rightarrow \quad y'=-\sin x \qquad , \qquad y=\cos u \quad \Rightarrow \quad y'=-u'\sin u$

اگر تابع $y=f(x)$ تابعی مشتق‌پذیر باشد، به صورت عموم مشتق n-ام آن عبارت است از: $y^{(n)}=f^{(n)}(x)$

تمرینات عمومی فصل دوم

به سوالات زیر چهار جواب داده شده است؛ از میان آنها، جواب صحیح را انتخاب کنید.

1- میل خط مماس با منحنی تابع $f(x)=x^2-x$ در نقطهٔ $P(3,0)$ عبارت است از:

$a)\ 3$ $b)\ -3$ $c)\ 5$ $d)\ -5$

2- تغییر متوسط تابع $f(x)=2x^2$ در انتروال $[3\ ,\ 4]$ عبارت است از:

$a)\ 18$ $b)\ 14$ $c)\ -14$ $d)\ 32$

3- مشتق تابع $y=2x^2-3x^{-1}$ عبارت است از:

$a)\ y'=4x^2+3$ $b)\ y'=4x+\frac{1}{2}x$ $c)\ y'=4x+\frac{3}{x^2}$ $d)\ y'=4x$

4 – مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x-1}$ عبارت است از:

$a)\ 0$ $b)\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$ $c)\ \frac{x-1}{2\sqrt{x}}$ $d)\ \frac{-1}{2\sqrt{x-1}}$

5 – معادلهٔ خط مماس با خط منحنی تابع $f(x)=2x^2+x$ در نقطهٔ $x=1$ عبارت است از:

$a)\ y=5x-2$ $b)\ y=x-3$ $c)\ y=5$ $d)\ y=5x$

6- مشتق تابع $y=\frac{2x}{-x+4}$ عبارت است از:

$a)\ y'=-4x+8$ $b)\ y'=-2$ $c)\ y'=\frac{4x+8}{(-x+4)}$ $d)\ y'=\frac{8}{(-x+4)^2}$

7 – مشتق تابع $y=(2-x^2)^3$ عبارت است از:

$a)\ y'=-6x^5+2x^3-24x$ $b)\ y'=3(2-x^2)^2$ $c)\ y'=3(-2x)^2$ $d)$ هیچ کدام

8 – مشتق تابع $y=\sin x$ عبارت است از:

$a)\ y'=\sin x$ $b)\ y'=\cos x$ $c)\ y'=-\sin x$ $d)\ y'=-\cos x$

9 – مشتق تابع $y=(1+x^4)^{\frac{-1}{5}}$ عبارت است از:

$a)\ y'=-\frac{4}{5}x^3(1+x^2)^{\frac{-6}{5}}$ $b)\ y'=-\frac{1}{5}(1+x^2)^{\frac{-6}{5}}$

$c)\ y'=-4x^3$ $d)$ هیچ کدام

10– مشتق تابع $y=\frac{\cos x}{1-\cos x}$ عبارت است از:

$a)\ y'=\frac{\sin x}{(1-\cos x)^2}$ $b)\ y'=\frac{-\sin x}{(1-\cos x)}$ $c)\ y'=\frac{-\sin x}{(1-\cos x)^2}$ $d)$ هیچ کدام

سؤالات زیر را حل کنید.

1- مشتق تابع $f(x)=\frac{2\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ را دریابید؟

2- مشتق تابع $f(x)=\frac{x+\sqrt{x-x^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}$ را دریابید؟

3- مشتق تابع $f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$ را دریابید؟

4- مشتق تابع $f(x)=(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x}+4)$ را دریابید؟

5- مشتق تابع $f(x)=\sin x\cdot\cos x$ را در نقطهٔ $\frac{\pi}{4}$ دریابید؟

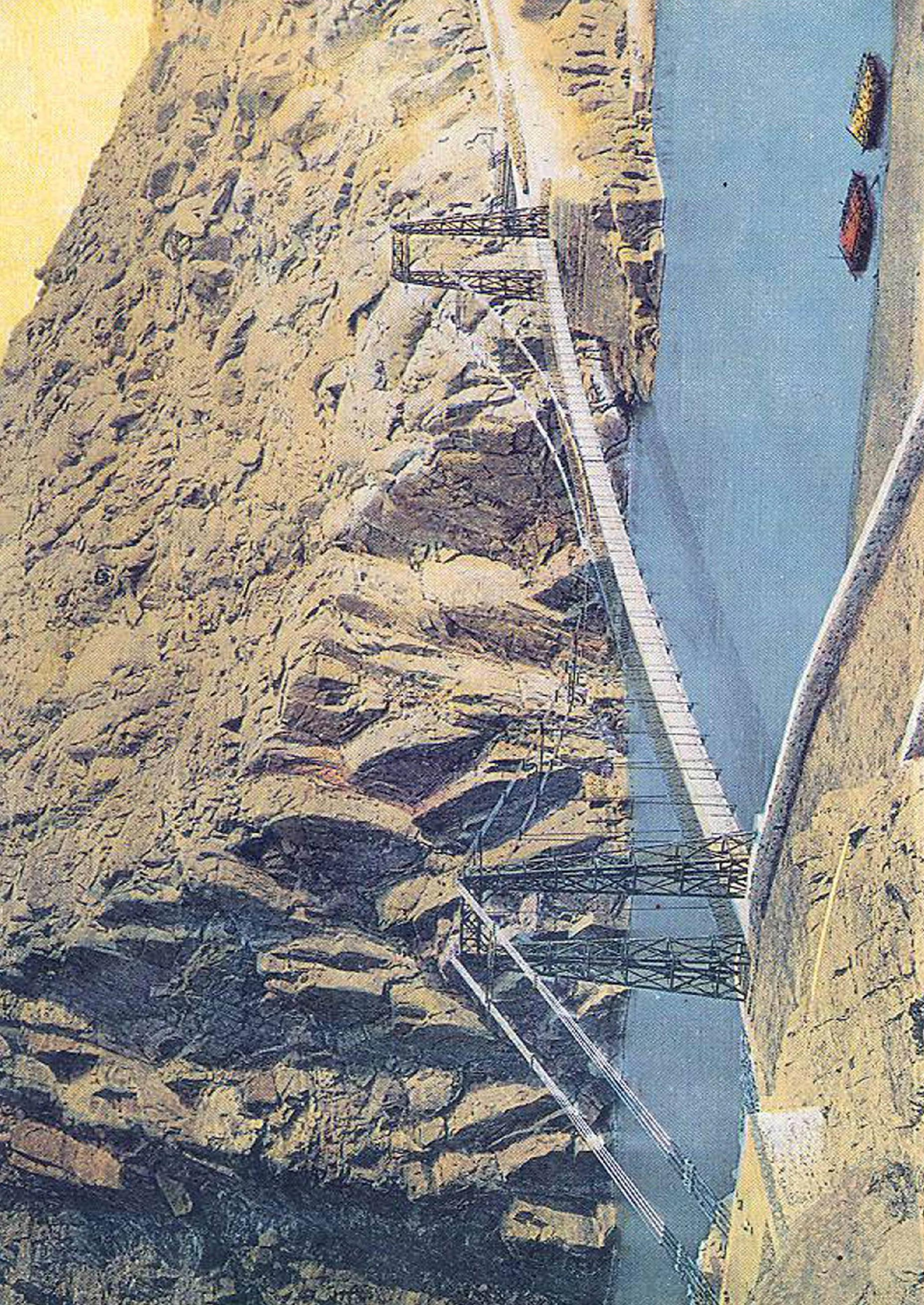
6- مشتق تابع $f(x)=\frac{(\sin x+\cos x)^2}{1+\sin 2x}$ را دریابید؟

7- مشتق مرتبهٔ هشتم $y=\cos x$ را دریابید؟

8- مشتق مرتبهٔ نهم $y=\sin^2 x+\cos^2 x$ را دریابید؟

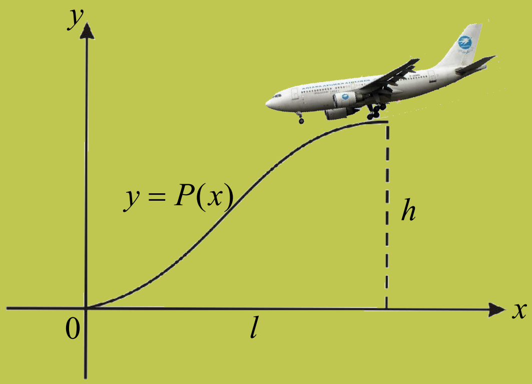
9- مشتق ضمنی تابع $x^2+xy+y^2=3$ را دریابید؟

فصل سوم
موارد استعمال مشتق



موارد استعمال مشتق

در مورد ارتفاع شکل مقابل نظر خود را بیان نمایید.

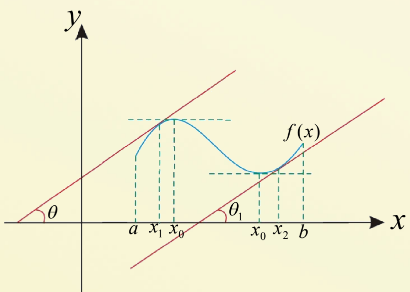


مشتق کابرد فراوان دارد؛ به طور مثال: در فزیک تمام معادلات مربوط به حرکت، سرعت و تعجیل و همچنان در کیمیا تحولات تابع، دریافت بعضی لیمت ها و ... با استفاده از مشتق حل می گردد .)

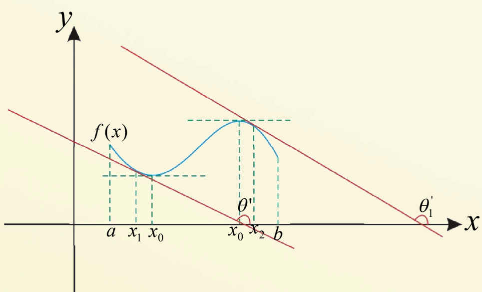
در اینجا بعضی از این موارد را تحت مطالعه قرار می‌دهیم:

I- تحولات یک تابع

به اشکال زیر توجه کنید:



(1)



(2)

- توابع متزاید و متناقص چه نوع توابعی اند؟
- در شکل (1) در انتروال (a,b) میل مماس‌های رسم شده در نقاط x_1 , x_0 و x_2 را با مماس‌های شکل (2) مقایسه کنید.

• در اشکال (1) و (2) بلند ترین و پایین ترین نقاط را مشخص کنید.

• در اشکال فوق نشان دهید که کدام تابع درکدام ساحه متزاید و در کدام ساحه تابع متناقص است.

• در توابع متزاید، متناقص و ثابت مشتق را مطالعه کنید.

نتیجهٔ فعالیت بالا را این‌طور بیان می‌کنیم:

1- اگر تابع $f(x)$ در انتروال $[a,b]$ متمادی و در انتروال (a,b) مشتق‌پذیر باشد، اگر در انتروال داده شده $f'(x)>0$ باشد؛ تابع در همان انتروال متزاید گفته می‌شود.

2- اگر تابع $f(x)$ در انترول $[a,b]$ متمادی و در انتروال (a,b) مشتق‌پذیر؛ و در انتروال داده شده $f'(x)<0$ باشد در این صورت تابع در همان انتروال متناقص می‌باشد.

یادداشت: مراد از تزاید تابع این است که با ازدیاد قیمت متحول x، قیمت تابع یا y افزایش یابد و مقصد از تناقص تابع این است که با ازدیاد قیمت متحول x، قیمت تابع یا y کاهش یابد.

مثال 1: نشان دهید که گراف تابع $f(x)=x^3+3x+1$ متزاید است.

حل: چون تابع به شکل کسر نیست، تمام قیمت‌های اعداد حقیقی می‌تواند ساحهٔ تعریف آن شود. همچنین می‌دانیم که شرط تابع متزاید $f'(x)>0$ است، ازاین‌رو لازم است تا مشتق تابع مذکور را تحت مطالعه قرار دهیم:

$$f(x)=x^3+3x+1$$
$$f'(x)=3x^2+3$$

دیده می‌شود که حد اول مشتق مربع تام بوده و همهٔ قیمت‌های x همیشه مثبت است و وقتی با عدد 3 جمع شود باز هم قیمت آن مثبت می‌باشد؛ لذا $f'(x)>0$ و تابع متزاید است.

مثال 2: تابع $f(x)=x^3-3x+5$ به کدام انتروال متناقص است؟

حل: چون تابع $f(x)$ در هر انتروال متمادی و مشتق‌پذیر است و برای توابع متناقص داریم که $f'(x)<0$ است:

$$f'(x)=3x^2-3<0$$
$$f'(x)=0$$
$$3x^2-3=0$$
$$3x^2=3$$
$$x=\pm 1$$

دیده می‌شود که مشتق تابع در انتروال $-1<x<1$ منفی است؛ پس تابع در همین انتروال $(-1,1)$ متناقص می‌باشد.

مثال3: تحولات تابع $y=5x-4$ را مطالعه کنید.

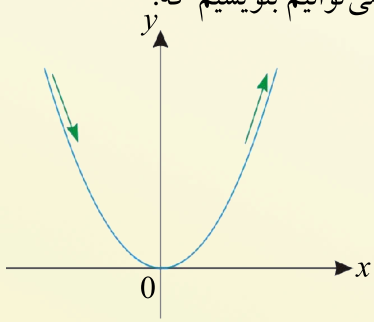
حل: ابتدا ساحهٔ تعریف تابع را دریافته و بعد از آن شرط تزاید را مطالعه می‌نماییم:

$$D_f \to IR$$
$$f(x)=5x-4$$
$$f'(x)=5>0$$

چون $f'(x)>0$ است، تابع مذکور برای تمام قیمت‌های x متزاید می‌باشد.

مثال4: به گراف تابع $y=x^2$ دقت کنید و سپس نشان دهید که تابع در کدام انتروال متزاید و در کدام انتروال متناقص است.

حل: می‌دانیم که اگر تابع متناقص باشد، $y'<0$ و اگر تابع متزاید باشد، $y'>0$ می‌باشد؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم که:



$y=x^2 \Rightarrow y'=2x$

شرط تناقص $y'<0 \Rightarrow 2x<0 \Rightarrow x<0$

شرط تزاید $y'>0 \Rightarrow 2x>0 \Rightarrow x>0$

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	4	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

به وضاحت در گراف تابع دیده‌می شود که تابع در انتروال $(-\infty,0)$ متناقص و در انتروال $(0,+\infty)$ متزاید است.

تمرین

1- تحولات تابع $y = ax + b$ را نشان دهید؟

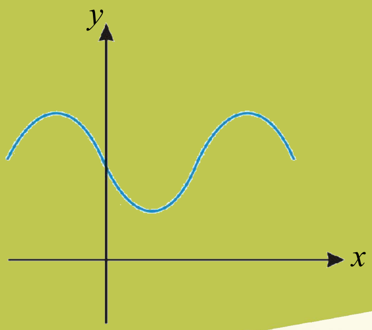
2- تحولات تابع $y = \frac{-3}{4}x - 1$ را نشان دهید؟

3- نشان دهید که تابع $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ در کدام انتروال متزاید است؟

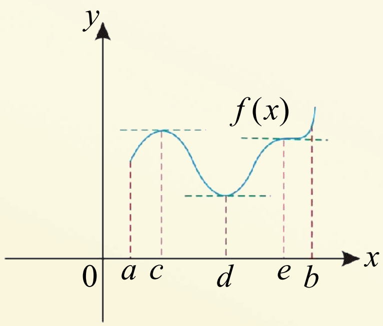
4- انتروال تزاید تابع $y = x^2 + 3x + 2$ را تعیین کنید؟

نقاط بحرانی($Critical\ Point$) یک تابع(اعظمی $Maximum$ و اصغری $Minimum$)

در شکل مقابل، بلندترین و پایین‌ترین نقطه را نشان داده و بگویید که این نقاط به نام چه یاد می‌شوند؟



در شکل مقابل اگر تابع $f(x)$ در انتروال (a,b) مشتق‌پذیر باشد:



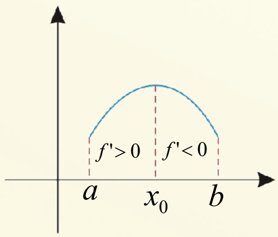
- با ازدیاد قیمت متحول در کدام انتروال قیمت تابع زیاد می‌شود؟
- با کم شدن قیمت متحول در کدام انتروال قیمت تابع کم می گردد ؟
- تحولات تابع را در انتروال (c ,d) و (d , e) مطالعه کنید.
- تابع $f(x)$ در کدام نقاط مساوی به صفر است؟

از فعالیت فوق نتیجه را این گونه بیان می کنیم:

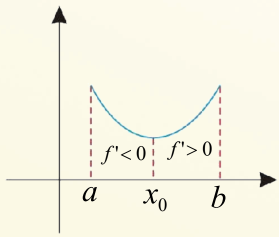
در گراف یا منحنی یک تابع؛ بلندترین نقطه به‌نام نقطهٔ اعظمی(Maximum) و پایین‌ترین نقطه به‌نام نقطهٔ اصغری(Minimum) یاد می‌شود و همان قیمت‌های x که در آنها تابع قیمت اعظمی و یا اصغری می گیرند به‌نام نقاط بحرانی (Critical Point) یاد می‌شوند.

تعریف

1. **تابع ثابت:** هرگاه مشتق اول یک تابع برای همیشه صفر باشد، تابع را ثابت می‌نامند.
2. **تابع متزاید:** هرگاه مشتق اول یک تابع در یک انتروال (a,b) مثبت باشد، تابع را در آن انتروال متزاید می‌نامند؛ یعنی: $y'>0$ که در اشکال (1) و (2) نشان داده شده است.
3. **تابع متناقص:** هرگاه مشتق اول یک تابع در یک انتروال (a,b) منفی باشد، تابع را در آن انتروال متناقص می‌نامند؛ یعنی: $y'<0$ در اشکال زیر نشان داده می‌شود.



(1)



(2)

1. **نقطهٔ اعظمی:** هرگاه یک تابع $y=f(x)$ در یک نقطهٔ معین x_0 از حالت تزاید به حالت تناقص تبدیل گردد و یا به عبارت دیگر، اشارهٔ مشتق در همین نقطهٔ معین x_0 از مثبت به منفی تبدیل گردد، نقطهٔ x_0 را نقطهٔ اعظمی (maximum) می‌نامند.
2. **نقطهٔ اصغری:** هرگاه یک تابع $y=f(x)$ در یک نقطهٔ معین x_0 از حالت تناقص به حالت تزاید تبدیل گردد و یا به عبارت دیگر، اشارهٔ مشتق در همین نقطهٔ معین x_0 از منفی به مثبت تبدیل گردد، نقطهٔ x_0 را نقطهٔ اصغری (minimum) می‌نامند.
3. **نقطهٔ انعطاف:** هرگاه مشتق اشارهٔ خود را در یک نقطهٔ معین x_0 از مثبت به صفر و دوباره به مثبت و یا از منفی به صفر و دوباره به منفی تبدیل نماید نقطهٔ x_0 را به‌نام نقطهٔ انعطاف (Inflection Point) یاد می‌نمایند.

مثال 1: تابع $f(x)=x^3-\frac{7}{2}x^2+2x$ داده شده است این تابع دارای چند نقطهٔ بحرانی است؟

حل: مشتق اول تابع را دریافته و $f'(x)=0$ را قرار داده و سپس قیمت‌های x را به دست می‌آوریم:

$$f'_{(x)}=3x^2-7x+2$$

$$f'(x)=0$$

$$3x-1=0 \Rightarrow x_1=\frac{1}{3}$$

$$x-2=0 \Rightarrow x_2=2$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{17}{54}$	$\searrow$	-2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$
			Max				Min		

در نتیجه گفته می‌توانیم که تابع اصلی درجه سوم بوده و مشتق تابع f تنها در دو نقطهٔ $(\frac{1}{3})$ و (2) علامهٔ خود را تغییر می‌دهد. بناءً دو نقطه بحرانی دارد.

مثال 2: نقاط بحرانی موضعی یا نسبتی تابع $f(x)=\frac{x+1}{x^2-2x}$ را مشخص نمایید.

حل: ابتدا مشتق تابع را به‌دست می‌آوریم و بعد از آن علامهٔ آنرا تعیین می‌نماییم.

دیده می‌شود که تابع شکل $y=\frac{u}{v}$ را دارد؛ پس: $y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f(x)=\frac{x+1}{x^2-2x}$$

$$f'(x)=\frac{x^2-2x-(2x-2)(x+1)}{(x^2-2x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-x^2-2x+2}{(x^2-2x)^2}$$

مشتق تابع وقتی مساوی به صفر است که صورت آن مساوی به صفر باشد.

$$f'(x)=0 \quad \Rightarrow -x^2-2x+2=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=12$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2+\sqrt{12}}{-2}=-2.73$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2-\sqrt{12}}{-2}=0.73$$

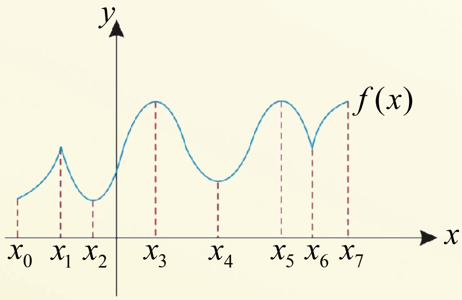
x		-3		-2.73		-1		0.73		1	
$f'(x)$	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{2}{15}$	$\searrow$	Min	$\nearrow$	0	$\nearrow$	Max	$\searrow$	-2	$\searrow$

در جدول دیده می‌شود که f' در هر دو طرف x_1 و x_2 علامهٔ خود را تغییر می‌دهد؛ بنابرین تابع دو نقطهٔ بحرانی دارد؛ یعنی دارای نقاط اعظمی و اصغری است.

نقاط اعظمی و اصغری مطلق(Absolute Maximum & Minimum Points):

ممکن است یک تابع در یک انتروال چند نقطهٔ بحرانی داشته باشد، اما در یک انتروال معین تابع یک نقطهٔ اعظمی مطلق و یا یک نقطهٔ اصغری مطلق را داراست که می‌تواند در شکل آن را مشاهده کنید.

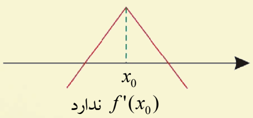
- به شکل زیر دقت کنید:

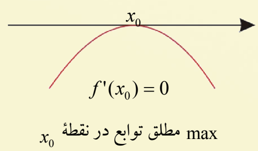


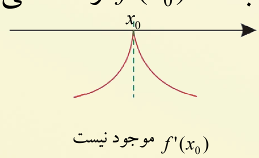
- نقاط اعظمی و اصغری تابع $f(x)$ را نشان دهید؟
- نقاط بحرانی تابع $f(x)$ را مشخص سازید؟
- تابع فوق در انتروال داده شده، چند نقطهٔ بحرانی موضعی دارد؟
- تابع فوق در انتروال داده شد، چند نقطهٔ اعظمی و اصغری دارد؟

نتیجهٔ فعالیت بالا را این طور بیان می‌کنیم:

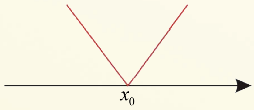
اعظمی مطلق(Absolute Maximum): به صورت عموم، نقطهٔ $(x_0, f(x_0))$ اعظمی مطلق شمرده می‌شود. در صورتی که در ساحهٔ تعریف تابع $f(x)$ برای هر (x)، $f(x) \le f(x_0)$ موجود باشد، $f(x_0)$ را اعظمی مطلق می‌گویند.



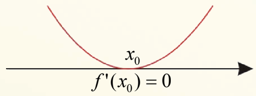




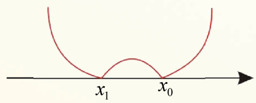
اصغری مطلـق(Absolute Minimum): بـه صـورت عمـوم، نقطـهٔ $(x_0, f(x_0))$ اصـغری مطلق نامیده می‌شود. در صورتی که در ساحهٔ تعریـف $f(x)$ بـه هـر (x)، $f(x)\geq f(x_0)$ موجـود باشد، $f(x_0)$ را اصغری مطلق می گویند. نقاطی که در آنها تابع یا قیمت اعظمی و یا اصغری می-گیرد به‌نام نقاط بحرانی یاد می کنند.



$f'(x_0)$ موجود نیست



min مطلق توابع در نقطهٔ x_0

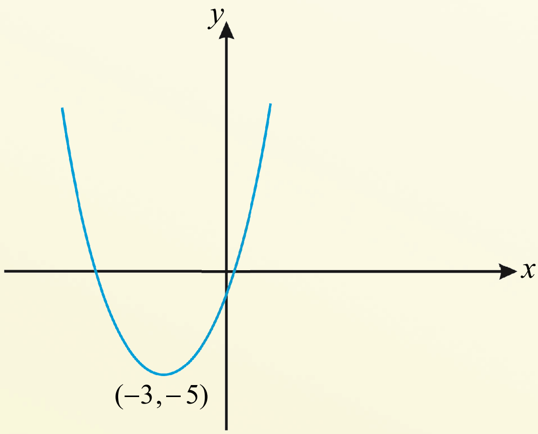


$f'(x_0)$ و $f'(x_1)$ موجود نیست

مثال 1: نقطهٔ اصغری مطلق را در تابع $f(x)=\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{1}{2}$ دریافت کنید:

حل: مشتق تابع $f(x)$ را گرفته و حل‌های مشتق تابع را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{1}{2}$$
$$f'(x)=x+3$$
$$f'(x)=0$$
$$x+3=0$$
$$x=-3$$
$$f(-3)=-5$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}(\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{1}{2})=+\infty$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}x^2+3\lim_{x\to\infty}x-\lim_{x\to\infty}(-\frac{1}{2})=+\infty$$



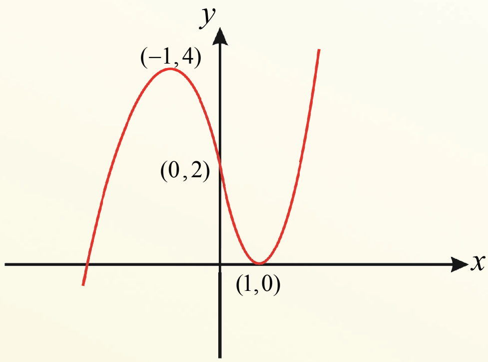
x	$-\infty$	-4	-3	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow$	$-\frac{9}{2} \searrow$	-5 Min $\nearrow$	$3 \nearrow$	$\frac{15}{2} \nearrow$	$+\infty$

در نتیجه، در نقطهٔ $x=-3$ قیمت عددی تابع -5 است و در نقطهٔ $(-3,-5)$ تـابع اصـغری مطلق دارد.

مثال2: نقاط اعظمی و اصغری تابع $f(x)=x^3-3x+2$ را دریافت نموده و گراف آن را رسم نمایید

حل: جهت دریافت نقاط اعظمی و اصغری تابع ابتدا مشتق اول تابع را دریافت نموده و سپس نقاط صفری مشتق را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=x^3-3x+2$$
$$f'(x)=3x^2-3$$
$$f'(x)=0$$
$$3x^2-3=0$$
$$3x^2=3$$
$$x^2=1$$
$$x_1=1 \quad , \quad x_2=-1$$
$$f(-1)=(-1)^3-3(-1)+2=4$$
$$f(1)=1^3-3\cdot1+2=1-3+2=0$$
$$f(0)=0-3\cdot0+2=2$$
$$f(2)=2^3-3\cdot2+2=4$$
$$f(1)=0 \quad , \quad f(0)=2 \quad , \quad f(-1)=4$$
$$Max\ f(-1)=4 \qquad Min\ f(1)=0$$



x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{5}{6}$	$\nearrow$	4 Max	$\searrow$	2	$\searrow$	0 Min	$\nearrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

در جدول به مشاهده می‌رسد که تابع در انتروال‌های $(-\infty,-1)$ و $(1,+\infty)$ متزاید و در انتـروال $(-1,1)$ متناقص است، بنابرین در نقطهٔ $(1,0)$ اصغری و در نقطهٔ $(-1,4)$ اعظمی است.

برای ترسیم گراف باید نکات زیر را در نظر گرفت:

1. مطالعهٔ متمادیت و غیرمتمادیت تابع
2. نقاط تقاطع گراف با محورات قایم
3. مطالعهٔ اشارهٔ مشتق اول تابع برای تزاید و تناقص تابع
4. دریافت نقاط صفری مشتق اول تابع برای تعیین نقاط اعظمی و اصغری تابع
5. تعیین مجانب‌ها
6. ترتیب جدول و بر اساس آن، ترسیم نمودن گراف

مثال3: گراف تابع $y=2+x-x^2$ را رسم کنید.

حل: دیده می‌شود که تابع برای همهٔ قیمت‌های متحول معین (تعریف شده) است.

1- نقاط تقاطع این تابع را با محورات x و y دریافت می‌کنیم.

برای دریافت نقاط تقاطع گراف با محور y، در تابع داده شده x را مساوی به صفر قرار می‌دهیم و قیمت y را دریافت می‌کنیم: $x=0 \quad y=2+0-0=2$

پس گراف فوق، محور y را در نقطهٔ $(0,2)$ قطع می‌کند.

برای دریافتن نقاط تقاطع گراف با محور x، y را مساوی به صفر قرار می‌دهیم و قیمت x را دریافت می‌کنیم:

$$y=0 \ , \ 2+x-x^2=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\cdot 2}}{-2}=-\frac{-1\pm 3}{2}$$

$$x_1=-1 \ , \ x_2=2$$

پس گراف فوق محور x را در نقاط $(-1,0)$ و $(2,0)$ قطع می‌کند.

2- نقاط اعظمی و اصغری تابع را دریافت می‌کنیم و به این منظور، مشتق اول و دوم تابع را مطالعه می‌نماییم:

$$y=2+x-x^2$$

چون در نقاط اعظمی و اصغری مشتق اول تابع صفر است، $y'=0$ را قرار می‌دهیم:

$$y'=1-2x$$

$$y'=0 \ , \quad 1-2x=0$$

$$-2x=-1 \quad \Rightarrow \quad 2x=1$$

$$x=\frac{1}{2}$$

تابع در نقطهٔ $x=\frac{1}{2}$ یک اعظمی یا یک اصغری دارد، برای تشخیص آن مشتق دوم تابع را در نقطهٔ $x=\frac{1}{2}$ مطالعه می‌کنیم: $y''=-2>0$

چون y'' همیشه منفی است، پس در نقطهٔ $x=\frac{1}{2}$ هم منفی می‌باشد؛ بنابرین تابع در نقطهٔ $x=\frac{1}{2}$ یک نقطهٔ اعظمی دارد. از آنجا که برای $x=\frac{1}{2}$ تابع $y=2+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=2\frac{1}{4}$ است؛ نقطهٔ اعظمی تابع عبارت می‌باشد از: $(\frac{1}{2}\text{، }2\frac{1}{4})$

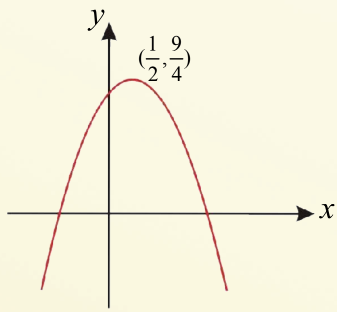
این منحنی نقطهٔ انعطاف ندارد زیرا برای هر x، $y''<0$ است، در حالی که در نقطهٔ انعطاف $y''=0$ می‌باشد.

3- مطالعهٔ گراف در $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}(2+x-x^2)=\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}(2+x-x^2)=-\infty$$

جهت وضاحت بیشتر جدول زیر را ترتیب نموده و تمام تحولات تابع را در آن نشان می‌دهیم و بعد گراف آنرا ترسیم می‌نماییم.

x		-1		$\frac{1}{2}$		2	
y'	$+$		$+$	0	$-$		$-$
y	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$2\frac{1}{4}$	$\searrow$	0	$\searrow$



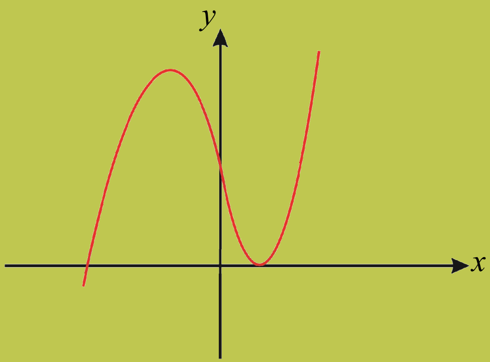
تمرین

1. extreme موضعی توابع زیر را دریابید؟

$a)\ f(x)=x^2-3x+2$ $\qquad b)\ f(x)=\frac{x+1}{x^2}$ $\qquad c)\ y=3x^2-4x+1$

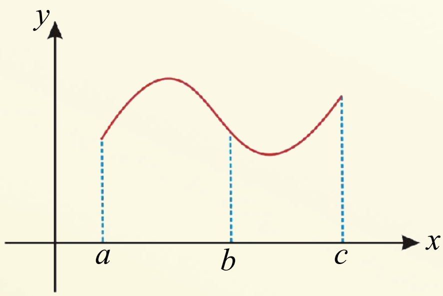
2- min مطلق تابع $f(x)=3x^3-4x^2$ را دریافت کنید؟

تعیین نقطهٔ انعطاف



نقطه‌یی که گراف یک تابع در آن از محدبیت به مقعریت و برعکس آن تبدیل می گردد ، به چه نام یاد می‌شود؟ آیا در این نقطه مشتق دوم و علامهٔ تابع را تحقیق کرده می‌توانید؟

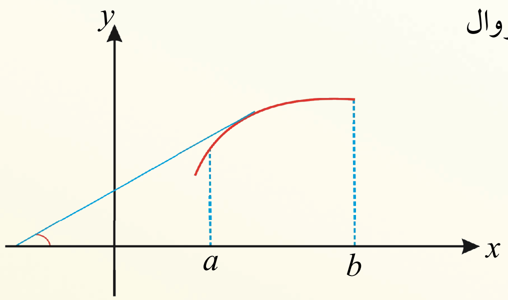
شکل زیر را در نظر بگیرید.



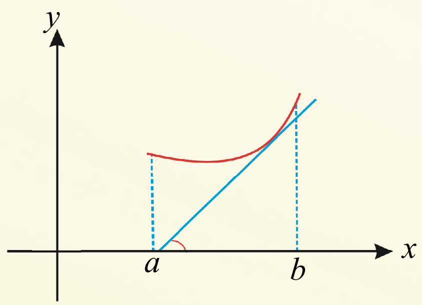
- منحنی تابع $y = f(x)$ در انتروال (a,b) چه نوع منحنی‌یی است؟
- منحنی تابع $y = f(x)$ در انتروال (b,c) چه نوع منحنی‌یی است؟
- در انتروال (a,b) به منحنی یک مماس رسم کنید و آن را با مماسی مقایسه کنید که در انتروال (b,c) با منحنی رسم می‌شود.

نتیجهٔ فعالیت فوق را این طور بیان می کنیم:

1. منحنی تابع $y = f(x)$ در یک انتروال محدب گفته می‌شود اگر در همین انتروال به منحنی مماس رسم شود و این مماس در قسمت بالایی منحنی واقع باشد که در این صورت، مشتق دوم تابع منفی به‌دست می‌آید؛ یعنی $y''<0$



اگر مشتق دوم تابع $y = f(x)$ در تمام نقاط انتروال منفی باشد، منحنی در همین انتروال محدب می‌باشد.



2. منحنی تابع $y = f(x)$ در یک انتروال مقعر گفته می‌شود در صورتی که در این انتروال به منحنی مماس رسم شود و منحنی در بالای مماس واقع گردد. همچنان اگر مشتق دوم تابع $y = f(x)$ در تمام نقاط انتروال مثبت $y'' > 0$ باشد، منحنی در این انتروال مقعر می‌باشد.

تعریف: نقطه‌یی که در آن منحنی جهت خود را تغییر می‌دهد؛ یعنی از مقعریت به محدبیت و یا برعکس آن به نام نقطهٔ انعطاف (Inflection) نامیده می‌شود.

اگر در تابع $y = f(x)$ برای $x = x_0$ مشتق دوم تابع صفر شود($f''(x) = 0$) تابع یک نقطهٔ انعطاف دارد و یا برعکس نقطهٔ انعطاف ندارد.

مثال 1: گراف تابع $f(x) = x^2 - 5x + 4$ را رسم و در آن مقعریت و محدبیت را تحقیق نمایید.

حل: تابع برای تمام قیمت‌های متحول معین است.

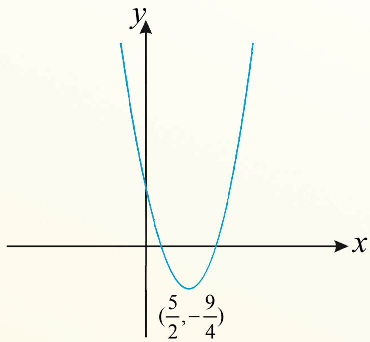
1- تقاطع با محور y:

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,4)$$

2- تقاطع با محور x:

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = (x-4)(x-1) \Rightarrow x_1 = 4 \quad , \quad x_2 = 1$$

نقاط تقاطع با محور x، $(4,0)$ و $(1,0)$ است.



x	$-\infty$		0		1		$\frac{5}{2}$		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	4	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{9}{4}$ min	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

برای تحقیق مقعریت و محدبیت گراف مشتق دوم تابع را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=x^2-5x+4 \quad \Rightarrow \quad y'=2x-5$$

$$f''(x)=2>0$$

چون $y''>0$ است، در نتیجه گفته می‌توانیم که منحنی مقعر است.

مثال 2: انتروال‌های را تعیین کنید که در آن گراف تابع $y=x^3+9x^2-6x+1$ محدب یا مقعر باشد.

حل:

$$y=x^3+9x^2-6x+1$$

$$y'=3x^2+18x-6 \quad \Rightarrow \quad y''=6x+18$$

$$y''<0 \quad \Rightarrow \quad 6x+18<0$$

$$6x<-18 \quad \Rightarrow \quad x<-3$$

$$y''>0 \quad \Rightarrow \quad 6x+18>0$$

$$6x>-18$$

$$x>-3$$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
y''	$-$	0	$+$
y	$\cap$		$\cup$
	محدب	انعطاف	مقعر

همان‌طورکه دیده می‌شود، مشتق دوم در $(-\infty,-3)$ منفی و در $(-3,+\infty)$ مثبت است، بنابران گراف در انتروال اول محدب و در انتروال دوم مقعر است.

مثال3: نقطهٔ انعطاف تابع $f(x)=x^5-5x^3$ را تعیین کنید؟

حل:

$$f(x)=x^5-5x^3 \;\Rightarrow\; f'(x)=5x^4-15x^2$$

$$f''(x)=20x^3-30x$$

$$f''(x)=0$$

$$20x^3-30x=0$$

$$x(20x^2-30)=0$$

$$x_1=0$$

$$20x^2-30=0 \;\Rightarrow\; x^2=\frac{30}{20}$$

$$x^2=\frac{3}{2} \;\Rightarrow\; x_2=\sqrt{\frac{3}{2}} \quad , \quad x_3=-\sqrt{\frac{3}{2}}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\cap$	-13.65	$\cup$		$\cap$	$-6\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\cup$	

دیده می‌شود که در نقاط $x=\sqrt{\frac{3}{2}}$، $x=0$ و $x=-\sqrt{\frac{3}{2}}$ مشتق دوم صفر است؛ یعنی $f''(x)=0$ علامهٔ خود را تغییر می‌دهد و در این نقاط مماس رسم شده می‌تواند، که آن نقاط عبارت از نقاط انعطاف اند.

تمرین

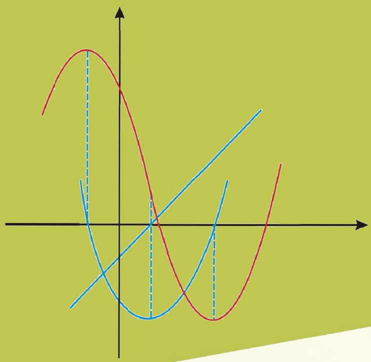
1- محدبیت و مقعریت تابع $f(x)=x^2-4$ را تعیین کنید؟

2- نقطهٔ انعطاف تابع $f(x)=-2x^2-1$ را تعیین کنید.

ترسیم منحنی‌ها

گراف توابع درجه دوم

گراف تابع شکل مقابل چه نوع تابعی را نشان می‌دهد؟



- گراف‌های توابع $y = x + 1$ و $y = -x + 1$ را رسم نموده و با هم مقایسه کنید؟
- ساحهٔ تعریف تابع $y = ax^2 + bx + c$ را تعیین کنید. آیا این تابع متمادی است؟
- مشتق اول تابع مذکور را دریابید و نقاط اعظمی، اصغری و محور تناظر را مشخص کنید.
- لیمت تابع را طوری پیدا کنید که $x \to \pm\infty$ تقرب کند.
- نقاط تقاطع با محورها را تعیین کنید.
- جدول تحولات را ترتیب و منحنی مذکور را رسم کنید.

نتایج فعالیت بالا را این طور بیان می‌کنیم:

1- ساحهٔ تعریف تابع: دیده می‌شود که تابع برای تمام قیمت‌های متحول معین است؛ یعنی تابع در انتروال $D_f \to (-\infty, +\infty)$ دارای قیمت‌های معین می‌باشد، لذا تابع در ناحیهٔ تعریف متمادی است.

2- تعیین نقاط بحرانی و محور تناظر: برای دریافت نقاط بحرانی نقاط صفری مشتق را دریافت می‌نماییم:

$$f'(x) = 2ax + b = 0$$
$$f'(x) = 0$$
$$2ax + b = 0$$
$$2ax = -b$$
$$x = \frac{-b}{2a}$$

قیمت $x=\frac{-b}{2a}$ را در اصل تابع قرار می‌دهیم:

$$y=a(-\frac{b}{2a})^2+b(-\frac{b}{2a})+c \quad \Rightarrow \quad a\cdot\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{2a}+c=0$$

$$y=\frac{b^2-2b^2+4ac}{4a}=\frac{-b^2+4ac}{4a} \quad \Rightarrow \quad \frac{4ac-b^2}{4a}$$

$(-\frac{b}{2a}\ ,\ \frac{4ac-b^2}{4a})$ نقطهٔ بحرانی، اعظمی یا اصغری است.

الف: اگر $a>0$ باشد؛ پس: $\quad a>0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

تابع در نقطهٔ $(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$ Min دارد.

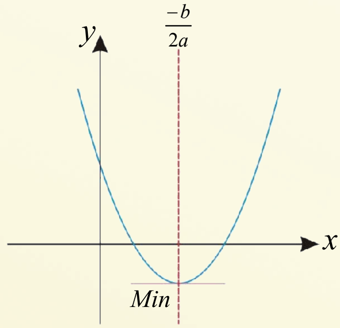
ب: اگر $a<0$ باشد؛ پس: $\quad a<0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

تابع در نقطهٔ $(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$ Max دارد.

3- برای ترسیم گراف تابع، جدول مربوطه را ترتیب و گراف آن‌را رسم می‌نماییم:

$a>0$

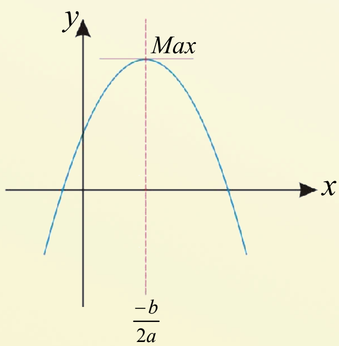
x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
y'		$-$		$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	$\nearrow$	$+\infty$



چون $a>0$ است دهن منحنی به طرف بالا و $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4})$ نقطهٔ اصغری است.

$a<0$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
y'		$-$		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	$\searrow$	$-\infty$



چون $a<0$ است دهن منحنی به طرف پایین و $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4})$ نقطهٔ اعظمی است.

مثال 1: تحولات تابع $f(x)=x^2-4x+3$ را مطالعه و گراف آن را رسم کنید.

1- تابع برای همهٔ قیمت‌های اعداد حقیقی متحول معین می‌باشد، یعنی ساحهٔ تعریف تابع $(-\infty,+\infty)$ است؛ پس تابع در همین انتروال متمادی می‌باشد.

2- نقاط تقاطع منحنی تابع با محور x:

$$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ x^2-4x+3=0 \\ (x-1)(x-3)=0 \\ x-1=0 \quad \Rightarrow \quad x=1 \\ x-3=0 \quad \Rightarrow \quad x=3 \end{array}\right\} \quad (1,0) \quad , \quad (3,0)$$

3- نقاط تقاطع منحنی تابع با محور y:

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=0-4\cdot 0+3 \\ y=3 \end{array}\right\} \quad (0,3)$$

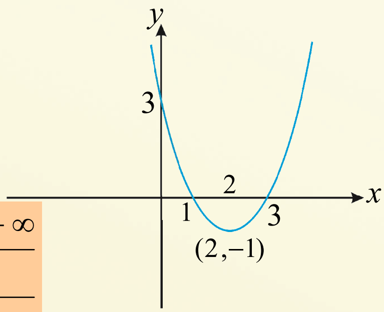
4- برای دریافت نقاط Extreme تابع، نقاط صفری مشتق اول تابع را دریافته و جدول آنرا ترتیب می‌نماییم.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=2x-4=0 \quad \Rightarrow \quad 2x=4 \quad \Rightarrow \quad x=2 \\ f(2)=2^2-4\cdot 2+3=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow V(2,-1)\min$$

$$x\to\pm\infty \quad \Rightarrow \quad f(x)\to\pm\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left[x^2-4x+3\right]=+\infty$$

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
y'		$-$		$-$		$-$		$+$		$+$	
y	$-\infty$	$\searrow$	3	$\searrow$	0	$\searrow$	-1 *Min*	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



مثال 2: تحولات تابع $f(x)=-x^2+2x$ را مطالعه و گراف آن را رسم کنید.

حل: دیده می‌شود که تابع برای تمام قیمت‌های متحول معین است؛ پس:

1- تعیین ساحهٔ تعریف تابع عبارت از $(-\infty,+\infty)$ می‌باشد و در حقیقت، تابع در این ساحه متمادی است.

2- نقاط تقاطع منحنی تابع با محور x:

$$f(x)=0$$
$$-x^2+2x=0$$
$$x(-x+2)=0$$
$$x_1=0 \qquad (0,0)$$

نقاط تقاطع

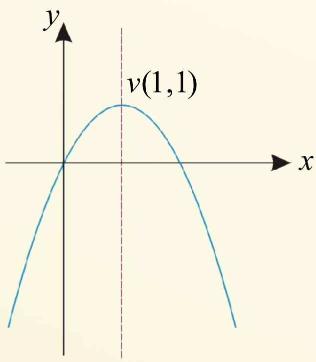
$$-x+2=0$$
$$x_2=2 \qquad (2,0)$$

3- تقاطع منحنی تابع با محور y:

$$x=0$$
$$f(x)=-x^2+2x$$
$$f(x)=0+2\cdot 0$$
$$f(x)=0 \qquad (0,0)$$

4- برای دریافتن نقاط Extreme تابع، نقاط صفری مشتق اول تابع را دریافته و جدول آنرا ترتیب و گراف آن را رسم می‌نماییم.

$$D_f \to (-\infty,+\infty)$$
$$f(x)=-x^2+2x$$
$$f'(x)=-2x+2=0$$
$$-2x+2=0$$
$$-2x=-2$$
$$\left.\begin{matrix} x=1 \\ f(1)=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow V(1,1)Max$$



x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	−	−	
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	$0 \nearrow$	$1 \searrow$	$0 \searrow$	$-\infty$
			Max		

در جدول بالا دیده می‌شود که علامهٔ مشتق از مثبت به منفی تغییر نموده و گراف تابع را از حالت تزاید به تناقص تغییر شکل می‌دهد؛ بنابرین تابع در نقطهٔ $(1,1)$ اعظمی است.

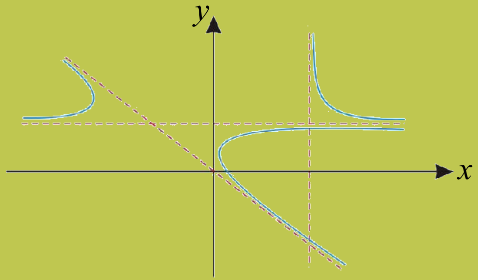
تمرین

1- گراف تابع $f(x)=2x^2-x-1$ را رسم کنید.

2- تحولات تابع $f(x)=x^2-x-2$ را مطالعه و گراف آن را رسم کنید.

مجانب‌های گراف توابع

به شکل مقابل توجه نموده و بگویید خطوط نقطه نقطه به چه نام یاد می‌گردند، هر کدام را نام ببرید؟



فعالیت

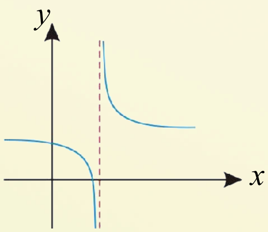
- مجانب‌ها چه نوع خطوطی اند؟
- مجانب‌ها، منحنی‌ها را در کجا قطع می‌کنند؟

نتیجهٔ فعالیت فوق را چنین بیان می‌نماییم:

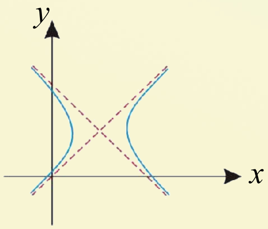
مجانب‌ها: مجانب‌ها عبارت از خطوطی مستقیم اند که حیثیت رهنمای منحنی را دارند و در توابعی که برای بعضی از قیمت‌های متحول غیر متمادی اند، وجود دارند.

مجانب‌ها به سه نوع اند:

1- مجانب عمودی: در تابع $y = f(x)$ وقتی مجانب عمودی به وجود می‌آید که اگر $x \to a$ کند، $y \to \infty$ می‌کند؛ یعنی $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ می‌گردد و یا به عبارت دیگر، در توابع کسری هرگاه مخرج کسر مساوی به صفر گردد، تابع مذکور به طرف بی‌نهایت تقرب می‌نماید. بنابرین جهت دریافت این نوع مجانب، مخرج کسر را مساوی به صفر قرار می‌دهیم.

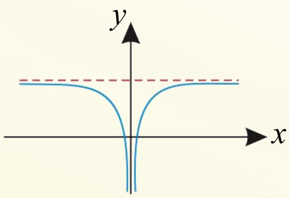


2- مجانب مایل: در تابع کسری $y = f(x)$ زمانی‌که حاصل تقسیم صورت بر مخرج کسر یک تابع خطی $(y = ax + b)$ باشد طوری‌که $a \neq 0$ به دست آید و این وقتی امکان پذیر است که تابع دارای مجانب مایل باشد، یعنی درجهٔ متحول صورت از درجهٔ متحول مخرج به اندازهٔ یک بزرگ‌تر باشد.



به خاطر داشته باشید که اگر یک تابع دارای مجانب افقی باشد مجانب مایل ندارد و برعکس هرگاه مجانب مایل داشته باشد، مجانب افقی ندارد.

3- مجانب افقی: یک تابع زمانی دارای مجانب افقی است که اگر $x \to \infty$ کند قیمت تابع مذکور یک مقدار ثابت گردد و یا به عبارت دیگر زمانی یک تابع دارای مجانب افقی است که $\begin{matrix} x \to \infty \\ y \to c \end{matrix}$ نماید؛ یعنی $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = c$ گردد. بنابرین برای دریافت این نوع مجانب لیمت تابع مذکور را دریافت می‌نماییم زمانی‌که $x \to \infty$ نماید.



مثال 1: مجانب عمودی تابع $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-4}$ را دریابید.

حل: برای دریافتن مجانب عمودی مخرج تابع را مساوی به صفر قرار می‌دهیم به این ترتیب که:

$$2x - 4 = 0$$
$$2x = 4$$
$$x = 2$$

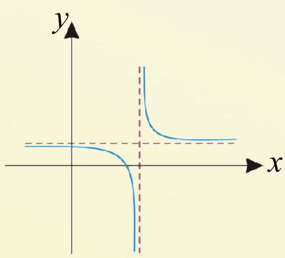
$x = 2$ عبارت از مجانب عمود تابع است.

مجانب افقی: برای دریافت مجانب افقی لیمت تابع را دریافت می‌نماییم طوری‌که $x \to \pm\infty$ کند.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x+1}{2x-4}\right) = \frac{1}{2}$$

$y = \dfrac{1}{2}$ عبارت از مجانب افقی است.

x	-1	0	$+1$
y	0	$-\frac{1}{4}$	-1



مثال 2: مجانب‌های تابع $y=\dfrac{x^2+2x-1}{x}$ را دریابید.

حل:

1- مجانب مایل: برای دریافت مجانب مایل، صورت تابع را بر مخرج تقسیم می کنیم:

$$\frac{x^2+2x-1}{x}=x+2-\frac{1}{x} \Rightarrow y=x+2$$

2- مجانب عمودی**:** برای دریافت مجانب عمودی مخرج تابع را مساوی به صفر قرار می‌دهیم:

$$y=\frac{x^2+2x-1}{x} \Rightarrow x=0$$

3- مجانب افقی: چون تابع مجانب مایل دارد مجانب افقی نمی‌تواند داشته باشد.

مثال 3: مجانب‌های تابع $f(x)=\dfrac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}$ را دریابید.

حل:

1. مجانب عمودی: مخرج تابع را مساوی به صفر قرار می‌دهیم:

$$(x+1)(x-2)=0$$

$$\left.\begin{matrix} x+1=0 \\ x_1=-1 \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} x-2=0 \\ x_2=2 \end{matrix}$$

پس $x=2$ و $x=-1$ مجانب‌های عمودی تابع اند.

2- مجانب افقی: برای دریافت مجانب افقی، لیمت تابع را به دست می‌آوریم:

$$y=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}=1$$

پس $y=1$ مجانب افقی است.

3- چون از حاصل تقسیم صورت بر مخرج تابع $y=ax+b$ حاصل نشد، دارای مجانب مایل نمی‌باشد.

روش عمومی تعیین مجانب‌ها:

هرگاه m و n به ترتیب درجهٔ صورت و مخرج تابع ناطق $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ باشند؛ پس:

الف: اگر $m<n$ باشد؛ محور x مجانب افقی است.

ب: اگر $m=n$ باشد $y=b$ مجانب افقی است طوری‌که b نسبت ضرایب حدود درجه‌های m و n می‌باشد.

ج: برای $m>n$ مجانب افقی وجود نداشته و احتمال موجودیت مجانب مایل وجود دارد.

د: در صورتی که $m=n+1$ باشد، یعنی اگر درجهٔ صورت یک واحد از درجهٔ مخرج بیشتر باشد تابع حتمی مجانب مایل دارد. در چنین حالتی، مجانب افقی موجود نیست.

تمرین

مجانب‌های توابع زیر را تعیین نمایید.

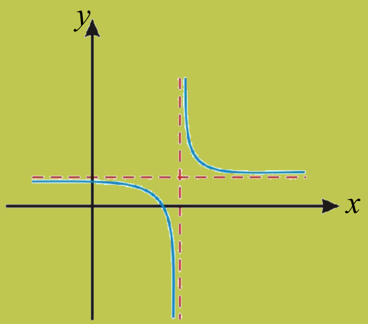
1) $f(x)=\dfrac{3x-6}{x^2-x-2}$

2) $f(x)=\dfrac{-2x^2}{x^2+1}$

3) $f(x)=\dfrac{8}{x^2-4}$

گراف توابع هوموگرافیک

به شکل توجه کنید، این شکل گراف چه نوع تابعی را نشان می‌دهد؟ مجانب‌های افقی و عمودی آن‌را نشان دهید.



- تابع هوموگرافیک چه نوع تابعی است؟ با یک مثال واضح سازید.
- گراف تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را رسم کنید.
- مجانب‌های تابع مذکور را دریافت و رسم کنید.
- تقاطع منحنی تابع فوق را با محورهای x و y پیدا کنید.

فعالیت فوق را این طور بیان می کنیم:

توابعی که شکل $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ را داشته باشند، به نام توابع هوموگرافیک یاد می‌شوند طوری که $c\neq 0$ باشد. این نوع توابع دو مجانب دارند که:

1- مجانب افقی:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{ax}{x}+\frac{b}{x}}{\frac{cx}{x}+\frac{d}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x}}{c+\frac{d}{x}} \Rightarrow y=\frac{a}{c}$$

2- مجانب عمودی (قایم):

$$cx+d=0 \Rightarrow cx=-d \Rightarrow x=-\frac{d}{c}$$

مثال 1: تحولات تابع $f(x)=\frac{2x-1}{x-3}$ را مطالعه و گراف آن را رسم کنید.

حل:

$$x-3=0$$
$$x=3$$

1- چون مخرج برای $x=3$ صفر می‌شود، تابع به استثنای $x=3$ دیگر به تمام قیمت‌های متحول معین است؛ یعنی ساحهٔ تعریف تابع: $Do\min = IR\setminus\{3\}$

2- تقاطع منحنی تابع با محور x:

$$\left.\begin{aligned} &f(x)=0\\ &2x-1=0\\ &2x=1 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{1}{2}\end{aligned}\right\}\ (\frac{1}{2},0)$$

3- تقاطع منحنی تابع با محور y:

$$\left. x=0 \quad\Rightarrow\quad f(0)=\frac{2\cdot 0-1}{0-3}=\frac{1}{3} \right\}\ (0,\frac{1}{3})$$

4- تعیین مجانب‌ها:

الف- مجانب افقی: $y=2$ ، $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x-3}=2$ یا $f(x)=\frac{a}{c}=\frac{2}{1}=2$

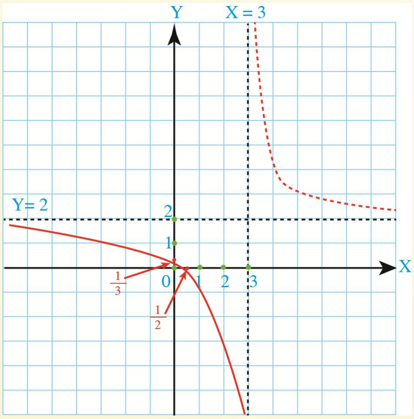
ب- مجانب عمودی: $x=3 \Leftarrow x-3=0$ یا $x=-\frac{d}{c}=-\frac{-3}{1}=3$

5- نقاط بحرانی تابع را دریافته، جدول آنرا ترتیب و گراف آن را رسم می‌نماییم.

$$f'(x)=\frac{2(x-3)-(2x-1)}{(x-3)^2}=\frac{-5}{(x-3)^2}<0$$

$$f''(x)=\frac{0\cdot(x-3)^2-(-5)\cdot 2(x-3)}{(x-3)^4}=\frac{10(x-3)}{(x-3)^4}=\frac{10}{(x-3)^3}$$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f''(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$2 \searrow -\infty$	تعریف نشده	$+\infty \searrow 2$



مثال2: تحولات تابع $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ را مطالعه و گراف آن را رسم کنید.

حل: $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

1- ساحهٔ تعریف تابع $D_f \to IR\setminus\{-1\}$ است؛ یعنی تابع در نقطهٔ $x=-1$ تعریف نگردیده است.

2- تقاطع منحنی تابع با محور x: $y=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow (1,0)$

3- تقاطع منحنی تابع با محور y: $x=0 \Rightarrow y=\frac{0-1}{0+1}=-1 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow (0,-1)$

4- تعیین مجانب‌ها:

الف- مجانب عمودی: $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

ب- مجانب افقی: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x+1} \Rightarrow f(x)=y=1$

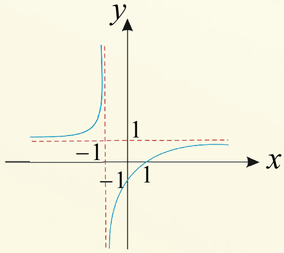
5- نقاط بحرانی Extreme تابع را دریافته، جدول آنرا ترتیب و گراف آن را رسم می‌نماییم.

$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}$$

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x+1)-1\cdot(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}>0$$

$$f''(x)=\frac{0\cdot(x+1)^2-2\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{-4(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{-4}{(x+1)^3}$$

x	$-\infty$ $\quad -1$	
$f'(x)$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\cup\, 1 \nearrow \infty$ تعریف نشده	$\cap\, -\infty \nearrow 1$



مثال3: می‌خواهیم گراف تابع $f(x)=\frac{2x-5}{x}$ رسم کنیم.

حل:

1- ساحهٔ تعریف را مطالعه می‌نماییم، دیده می‌شود که تابع به استثنای $x=0$ دیگر به تمام قیمت‌های متحول معین است؛ یعنی $D_f \to IR\setminus\{0\}$

2- تقاطع با محورات

الف- تقاطع با محور x:

$$f(x)=0 \Rightarrow \frac{2x-5}{x}=0$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x-5=0 \\ 2x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow (2.5,0)$$

ب- تقاطع با محور y: برای $x=0$ تابع $f(x)$ تعریف نشده است؛ بنابرین محور y نقطهٔ تقاطع ندارد.

a. **مجانب‌ها:**

الف– مجانب عمودی: چون در مخرج تابع تنها x موجود است؛ $x=0$ مجانب عمودی می‌باشد در این‌صورت محور y مجانب عمودی تابع شده می‌تواند.

ب– مجانب افقی: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\dfrac{2x-5}{x}\right]=2$ است؛ پس $y=2$ مجانب افقی تابع می‌باشد.

b. دریافت نقاط بحرانی: برای دریافت نقاط بحرانی مشتق اول تابع را دریافت می‌نماییم:

$$f(x)=\frac{2x-5}{x}$$

$$f'(x)=\frac{2\cdot x-(2x-5)}{x^2}=\frac{2x-2x+5}{x^2}$$

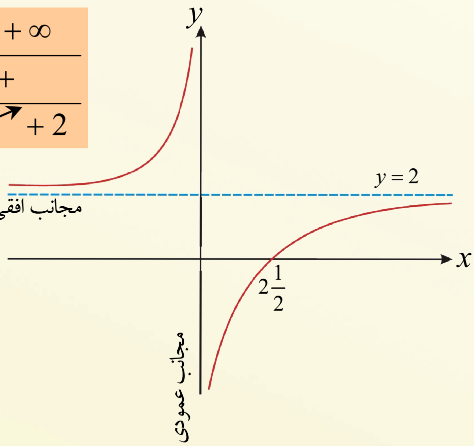
$$f'(x)=\frac{5}{x^2}>0$$

چون $f'(x)>0$ است بنابرین تابع متزاید می‌باشد.

برای ترسیم درست گراف، جدول تحولات تابع را طور زیر ترتیب می‌نماییم:

x	$-\infty$		0		2.5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$		$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+2$

تعریف نشده



تمرین

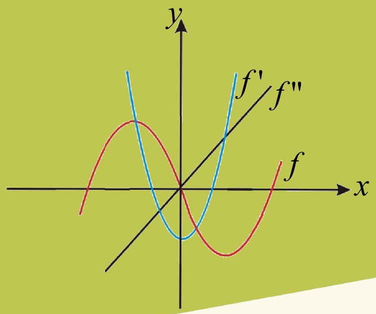
1- تحولات تابع $f(x)=\dfrac{x-1}{x+3}$ را تحقیق و ترسیم کنید؟

2- تحولات تابع $f(x)=\dfrac{x}{x-4}$ را تحقیق و ترسیم نمایید؟

گراف تابع یک مجهولهٔ درجه سوم

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad , \quad a \neq 0$$

شکل مقابل، گراف بعضی از توابع را نشان می‌دهد، در مورد گراف هر تابع نظر خود را بیان نمایید.



- راجع به تابع $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ فکر کرده و بگویید که تابع درجه چند است.
- ضرایب و حد ثابت تابع مذکور را بنویسید.
- مشتق دوم تابع فوق را به دست آورید.

فعالیت بالا را این طور بیان می‌کنیم:

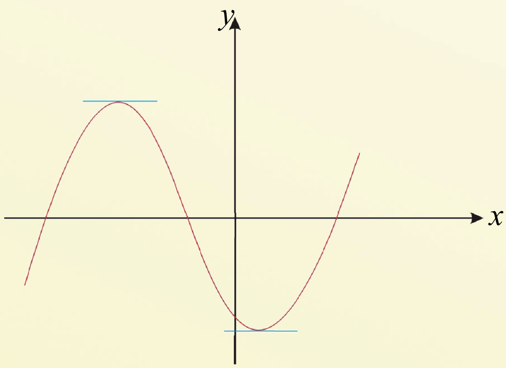
1- تابع درجه سوم $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ را طوری در نظر می‌گیریم که $a > 0$ باشد. هرگاه مشتق اول این تابع را دریافت نماییم، یک تابع درجه دوم به دست می‌آید اگر در این تابع $(\Delta f' > 0)$باشد مشتق اول تابع دارای دو راه حل است. اکنون اگر $a > 0$ باشد، منحنی از چپ به راست، اول یک اعظمی نسبی و بعد یک اصغری نسبی دارد.

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$a > 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta f' > 0$

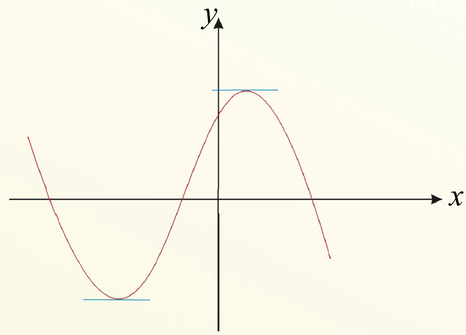
x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$



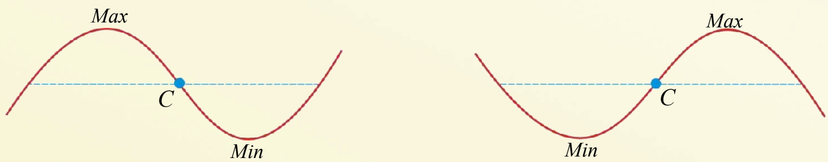
2- اگر در تابع $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$، $a < 0$ و $\Delta f' > 0$ باشد، پس $f'(x) = 0$ و معادله دارای دو راه حل است و برای $\Delta f' > 0$ منحنی از طرف چپ به طرف راست، یک اصغری نسبی و یک اعظمی نسبی دارد.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$a < 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta f' > 0$$

x		x_1		x_2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty \searrow$		$\nearrow$		$\searrow -\infty$



3- اگر منحنی تابع درجه سوم نقطهٔ بحرانی نسبی داشته باشد، مختصات نقطهٔ انعطاف آن عبارت است از: $I(x_c, y_c) = (\frac{x_{max} + x_{min}}{2}, \frac{y_{max} + y_{min}}{2})$

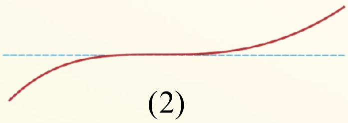


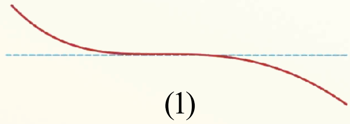
4- نقاط تناظر تابع درجهٔ سوم نقاط انعطاف تابع می‌باشد:

$$f'(x) = 0$$
$$3ax^2 + 2bx + c = 0$$

که مرکز تناظر آن، بعد از تکمیل مربع معادلهٔ فوق، از حل آن به دست می‌آید که $x = -\frac{b}{3a}$ است.

5- در تابع $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ اگر $a<0$ و $\Delta f'=0$ باشد و $f'(x)=0$ وضع شود، معادله یک یا دو راه حل مساوی دارد که در این حالت اگر $f'(x)<0$ باشد، گفته می‌توانیم که تابع متناقص است؛ مانند شکل (1)، اما اگر $f'(x)>0$ باشد، تابع متزاید است؛ مانند شکل (2).


(2)


(1)

مثال 1: تحولات تابع $f(x)=(x-1)(x+2)^2$ را تحقیق و گراف آن را رسم کنید.

حل: ابتدا مشتق اول تابع را به‌دست آورده، آن‌را مساوی به صفر قرار می‌دهیم و مختصات extreme تابع را تعیین می‌نماییم. و بعد به کمک مشتق اول مشاهده می‌نماییم که تابع در کدام قسمت متزاید و در کدام قسمت متناقص است. همچنین نقاط تقاطع با محورات را دریافت می‌داریم و برای تشخیص نقاط اعظمی، اصغری و نقاط انعطاف از مشتق دوم تابع استفاده نموده جدول تحولات را ترتیب و گراف آن‌را رسم می‌نماییم:

$$f(x)=x^3+3x^2-4$$

$$f'(x)=3x^2+6x$$
$$3x^2+6x=0$$
$$x(3x+6)=0$$
$$x_1=0 \quad , \quad 3x+6=0 \;\Rightarrow\; x_2=-2$$
$$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; x_1=0 \quad , \quad x_2=-2$$
$$f(0)=0^3+3\cdot 0^2-4=-4$$
$$f(-2)=(-2)^3+3(-2)^2-4$$
$$=-8+12-4=0$$
$$f''(x)=0 \;\Rightarrow\; 6x+6=0$$
$$6x=-6$$
$$x=-1$$

برای به دست آوردن نقطهٔ انعطاف در تابع اصلی $x=-1$ را وضع نموده و قیمت $f(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(-1)=(-1-1)(-1+2)^2=-2$$

نقطهٔ انعطاف: $I(-1,-2)$

تقاطع با محورات:

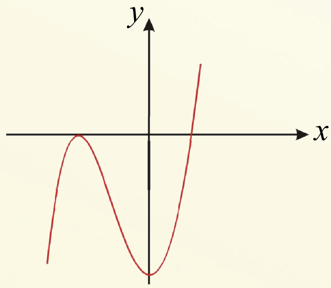
الف– تقاطع با محور x:

$$y=0$$
$$(x-1)(x+2)^2=0$$
$$\left.\begin{array}{l} x-1=0 \\ x=1 \\ \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (x+2)^2=0 \\ x+2=0 \\ x_2=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow (1,0)\ ,\quad (-2,0)$$

ب– تقاطع با محور y:

$$x=0$$
$$y=0^3+3\cdot 0^2-4=-4 \quad \Rightarrow (0,-4)$$

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$-$		$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$		$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-2	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$
			max				min		



مثال 2: تحولات تابع $f(x)=-x^3+3x^2$ را تحقیق و گراف آن را رسم کنید.

حل: ابتدا مشتق اول تابع را دریافت نموده و سپس نقاط صفری، اعظمی و اصغری تابع را به دست می‌آوریم:

-1

$$f(x)=-x^3+3x^2$$
$$f'(x)=-3x^2+6x$$
$$f'(x)=0 \quad \Rightarrow \ -3x^2+6x=0 \quad \Rightarrow \ x(-3x+6)=0$$
$$x_1=0 \quad , \quad -3x+6=0 \ \Rightarrow \ -3x=-6 \ \Rightarrow \ x_2=2$$

نقاط اعظمی و اصغری عبارت است از:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=-0^3+3\cdot 0^2=0 \\ f(2)=-2^3+3\cdot 2^2=4 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0)\ ,\quad (2,4)$$

2- تقاطع با محورات:

الف- تقاطع با محور x:

$$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ -x^3+3x^2=0 \\ x^2(-x+3)=0 \\ x_1=0 \quad , \qquad -x+3=0 \\ \qquad\qquad\quad x_2=3 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0) \qquad , \qquad (3,0)$$

ب- تقاطع با محور y:

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ f(x)=-0^3+3\cdot 0^2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0)$$

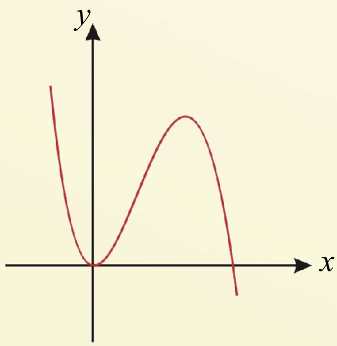
3- برای دریافت نقطهٔ انعطاف $f''(x)$ را مطالعه می‌نماییم:

$$f''(x)=-6x+6=0$$
$$x=1$$
$$f(x)=-x^3+3x^2$$
$$f(1)=2 \quad \Rightarrow \quad I(1,\ 2)$$

4- حال جدول را ترتیب و گراف آنرا رسم می‌نماییم:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$		$-$	
$f''(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\cup$	0	$\cup$	2	$\cap$	4	$\cap$	$-\infty$

Min نسبی   Max نسبی



مثال 3: مختصات مرکز تناظر تابع $f(x)=x^3-3x^2+x+1$ را دریابید.

حل: می‌دانیم که مرکز تناظر از رابطهٔ $x=\dfrac{-b}{3a}$ به‌دست می‌آید؛ پس:

$$x=\frac{-b}{3a}=\frac{-(-3)}{3\cdot 1}=1 \quad \Rightarrow \quad f(1)=1^3-3(1)^2+1+1=0$$

$C(1,0)$ مختصات مرکز تناظر

تمرین

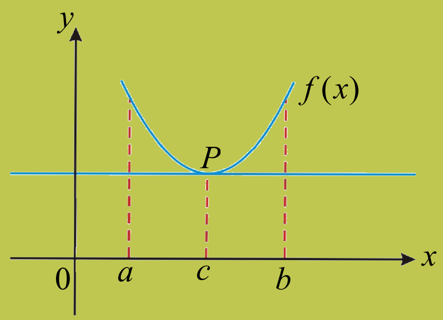
1- جدول تحولات توابع زیر را ترتیب و گراف آن را رسم کنید؟

$b)\ \ f(x)=-(x-1)^3$ $\qquad$ $a)\ \ f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+x+1$

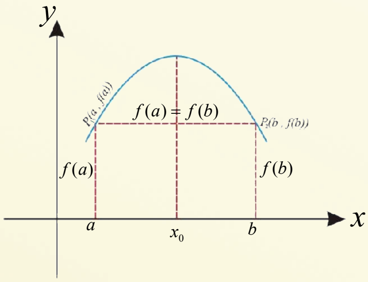
2- مختصات مرکز تناظر تابع $f(x)=-2x^2+6x-3$ را پیدا کنید.

قضیهٔ رول

Rolle Theorem



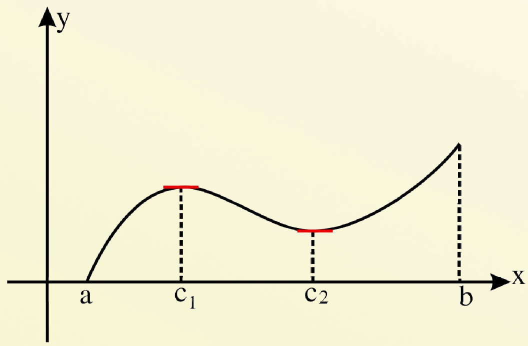
در شکل مقابل، تابع $f(x)$ با خط مستقیم Δ چه رابطه‌یی دارد و $f'(c)$ مساوی با چی است؟



در شکل مقابل، در انتروال (a,b) بالای منحنی $f(x)$ نقطه‌یا نقاطی موجود است که از آن می‌توان به منحنی مماسی موازی با محور x رسم نمود.

- تابع $f(x)$ در کدام انتروال متمادی و مشتق‌پذیر است؟
- اگر $f(a)=f(b)$ باشد، نقطهٔ x_0 را در انتروال (a,b) مطالعه کنید.

از فعالیت بالا این قضیه به دست می‌آید:



قضیه

اگر تابع $f(x)$ در انتروال $a \le x \le b$ متمادی و در انتروال $a < x < b$ مشتق‌پذیر باشد؛ هرگاه $f(a)=f(b)$ شود، بنابرین کم از کم یک نقطهٔ x_0 در انتروال $a < x < b$ موجود است که در آن $f'(x_0)=0$ می‌شود.

ثبوت:

چون تابع $f(x)$ در انتروال داده شده متمادی و مشتق‌پذیر است، دارای نقاط بحرانی نیز می‌باشد.

1- اگر تابع $f(x)=c$ باشد، واضح است که $f'(x)=0$ است.

2- اگر تابع $f(x)$ ثابت نباشد و $x_1, x_2 \in (a,b)$ و $f(x_1)>0$ باشد؛ تابع در $x_0 \in [a,b]$ یک قیمت اعظمی(Maximum) دارد، که $f(x_0) \geq f(x_1) > 0$ است. به همین ترتیب اگر $f(x_2)<0$ باشد، در تابع یک قیمت اصغری(Minimum) دارد.

از آنجا که در نقاط بحرانی(Extreme) مشتق اول تابع صفر است؛ $f'(x_0)=0$ می‌شود.

مثال 1: قضیهٔ رول را برای تابع $f(x)=\cos x$ در انتروال $[a,b]=(\pi, 5\pi)$ تطبیق کنید.

حل: $f(\pi)=(5\pi)=-1$ است؛ بنابرآن تابع $f(x)$ برای هر قیمت x مشتق‌پذیر است، در $(\pi,5\pi)$ متصل و در انتروال $(\pi,5\pi)$ دارای مشتق می‌باشد و مطابق به قضیهٔ Rolle در انتروال $(\pi,5\pi)$ کم از کم یک x_0 موجود است تا $(\cos x)'=0$ شود، چنان که $(\cos x)'=-\sin x$ می‌باشد. پس باید کم از کم یک حل معادلهٔ $-\sin x=0$ در $(\pi,5\pi)$ موجود باشد. $-\sin x=0 \Rightarrow \sin x=0$ این معادله در $(\pi,5\pi)$ دارای سه حل $4\pi, 3\pi, 2\pi$ می‌باشد.

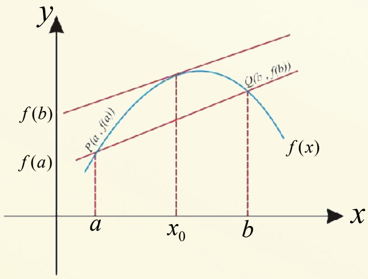
مثال 2: قضیهٔ رول را در تابع $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ در انتروال $[a,b]=[-1,1]$ تطبیق کنید.

حل: دیده می‌شود که تابع در نقاط آغاز و انجام مشتق‌پذیر نیست، ولی قضیهٔ رول در آن قابل تطبیق است؛ زیرا $f(-1)=f(1)=0$ و $f(0)$ در انتروال $[-1,1]$ متصل است و در $[-1,1]$ یک عدد x_0 موجود می‌باشد تا $f'(x_0)=0$ شود و آن عبارت از $x_0=0$ است.

مشتق را با استفاده از فورمول $y'(x)=\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u}}$ دریافت می‌نماییم:

$$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \Rightarrow \quad f'(0)=\frac{0}{\sqrt{1-0^2}}=0$$

قضیهٔ قیمت متوسط(قضیهٔ لاگرانژ):



شکل مقابل را در نظر بگیرید.

- میل یک خط مستقیم از کدام رابطه به دست می‌آید؟
- میل خط مستقیم $\overline{PQ}$ را دریافت کنید.
- میل $\overline{PQ}$ با مشتق تابع $f(x)$ چه رابطه‌یی دارد؟

از فعالیت فوق قضیهٔ زیر را بیان می‌کنیم:

قضیه: اگر $f(x)$ در انتروال $[a,b]$ متمادی و مشتق‌پذیر باشد، در همین انتروال (a,b) یک عدد C موجود است طوری که $f(b)-f(a)=f(c)(b-a)$ می‌شود؛ یعنی:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ثبوت: یک تابع کمکی را در نظر می‌گیریم:

$$g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot x$$

$$g(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot a=\frac{f(a)b-f(b)a}{b-a} \quad .... \text{ I}$$

:

$$g(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot b=\frac{f(a)b-f(b)a}{b-a} \quad .... \text{ II}$$

نظر به مساوی شدن طرف راست رابطهٔ I و II چنین نتیجه می‌گیریم که بر اساس قضیهٔ رول $c\in(a,b)$ موجود است؛ طوری که $g'(c)=0$ و:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \Rightarrow \quad g'(x) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \qquad \Rightarrow \quad f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\Rightarrow \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

مثال: در تابع $f(x) = 2x^3 - 8x + 1$ قضیهٔ قیمت متوسط را در $[a,b] = [1,3]$ بررسی نمایید.

حل: دیده می‌شود که تابع $f(x)$ در $[1,3]$ متمادی و در $(1,3)$ مشتق‌پذیر است؛ بنابرآن مطابق قضیهٔ قیمت متوسط در $(1,3)$, x_0 موجود است.

$$f(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{36}{2} = 18$$

برای دریافت c داریم:

$$f'(x_0) = 6x^2 - 8 = 18 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{26}{6}}$$

از آنجا که $x = \sqrt{\frac{26}{6}}$ در انتروال $(1,3)$ اشتراک دارد، $x_0 = \sqrt{\frac{13}{3}}$ است.

و $x = -\sqrt{\frac{26}{6}}$ در انتروال $(1,3)$ اشتراک نداشته و قابل قبول نیست.

تمرین

1- قیمت x_0 را در تابع $f(x) = \sqrt{x(4-x)}$ در انتروال $[0,4]$ طوری پیدا کنید که قضیهٔ رول در آن صدق کند؟

2- قیمت x_0 را در تابع $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x$ در انتروال $[0,3]$ طوری پیدا کنید که قضیهٔ رول در آن صدق کند؟

قاعدهٔ هوپیتال (L'Hopitall)

مساوات مقابل چه را بیان می‌کند؟

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- لیمت تابع $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ را طوری دریافت کنید که $x\to 1$ تقرب کند.
- لیمت مشتق صورت و مخرج تابع فوق را دریافت کنید و با لیمیت آن مقایسه نمایید.
- لیمت تابع $f(x)=\dfrac{3x^4-3x^2-2x-1}{2x^2-4x^3+2x^4}$ را در صورتی دریافت نمایید که $x\to\infty$ تقرب کند.
- لیمت مشتق صورت و مخرج تابع فوق را دریافت کنید و با لیمیت آن مقایسه نمایید.

از فعالیت فوق، این قاعده را بیان می‌کنیم:

قاعدهٔ هوپیتال: اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ در انتروال (a,b) تعریف شده و مشتق‌پذیر باشد.

هرگاه لیمیت نسبت $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ هنگامی‌که $x\to a$ شکل مبهم $\dfrac{0}{0}$ و هنگامی‌که $x\to\infty$ شکل مبهم $\dfrac{\infty}{\infty}$ را اختیار نماید، قیمت حد(لیمت تابع) مشتق $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ را دریافت نموده و قیمت گذاری می‌نماییم اما اگر باز هم نسبت توابع مذکور در شکل مبهم قرار داشته باشد، مشتق دوم، سوم ...n–ام آنرا دریافت می‌کنیم تا رفع ابهام گردد؛ به طور مثال:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^2-4}=\frac{2\cdot 2^2+2-10}{2^2-4}=\frac{0}{0}=0$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{4x+1}{2x}=\frac{4\cdot 2+1}{2\cdot 2}=\frac{9}{4}$$

یا:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(2x+5)(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{2x+5}{x+2}=\frac{2\cdot 2+5}{2+2}=\frac{9}{4}$$

مثال: با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال لیمت توابع زیر را پیدا کنید.

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{x+\sin 2x}{x-\sin 2x}\qquad 2)\ \lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3}\qquad 3)\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+6}{7x^2-2x+1}$$

جواب اول:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin 2x}{x-\sin 2x}=\frac{0+\sin 2\cdot 0}{0-\sin 2\cdot 0}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+\sin 2x)'}{(x-\sin 2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1+2\cos 2x}{1-2\cos 2x}=\frac{1+2}{1-2}=-3$$

جواب دوم:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{3^4-81}{3-3}=\frac{81-81}{3-3}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x^4-81)'}{(x-3)'}=\lim_{x\to 3}\frac{4x^3}{1}=\frac{4\cdot 3^3}{1}=108$$

جواب سوم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+6}{7x^2-2x+1}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2-4x+6)'}{(7x^2-2x+1)'}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x-4}{14x-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(6x-4)'}{(14x-2)'}=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$$

تمرین

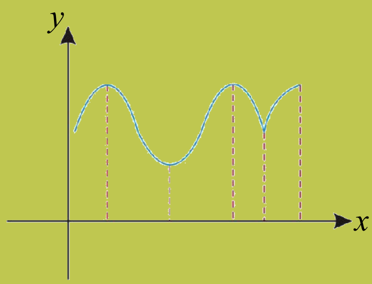
با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال، قیمت لیمت‌های زیر را دریافت کنید.

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\qquad b)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x^3-1}$$

$$c)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3}\qquad d)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{3x^3}$$

تطبیق نقاط بحرانی

در شکل مقابل، بلندترین و پایین‌ترین نقاط را نشان داده و بگویید این نقاط را به چه نام یاد می‌کنند؟



مثال‌ها

مثال 1: دو عددی را پیدا کنید که حاصل جمع‌شان 20 می‌شود و حاصل ضرب آن‌ها بزرگ‌ترین قیمت ممکن را دارد.

حل: اگر عدد اولی x باشد؛ پس عدد دومی $20-x$ است و حاصل ضرب آن‌ها را به شکل تابع این طور می‌نویسیم: $f(x)=x(20-x)$ و چون عدد x در انتروال $[0,20]$ تحول می‌کند، نقطهٔ اعظمی مطلق تابع را در $[0,20]$ جستجو می‌کنیم:

$$f(x)=20x-x^2$$
$$f'(x)=0$$
$$20-2x=0$$
$$-2x=-20$$
$$x=10$$
$$f(10)=20\cdot10-10^2=200-100=100$$
$$f(0)=20\cdot0-0^2=0$$
$$f(20)=20\cdot20-20^2=400-400=0$$

دیده می‌شود که (10 ، 100) نقطهٔ اعظمی تابع است، بنابرین اعداد مطلوبی که حاصل ضرب شان 100 شود، عبارت اند از: $x_1=10$ و $x_2=10$.

مثال 2: معادلهٔ یک متحرک به شکل $x=(t-2)(t-3)$ داده شده است. سرعت متوسط متحرک را در انتروال زمانی $t_2=4, t_1=3$ دریافت کنید.

حل: نظر به تعریف سرعت متوسط می‌توانیم بنویسیم:

$$\text{سرعت متوسط}=\frac{x_{(t_2)}-x_{(t_1)}}{t_2-t_1}=\frac{x_{(4)}-x_{(3)}}{4-3}=\frac{2-0}{4-3}=2$$

مثال3: نسبت متوسط بین حجم و مساحت کره را دریافت کنید.

حل:

$$\text{حجم کره} = v_{(x)} = \frac{4}{3}\pi x^3 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{4}{3}\pi \cdot 3x^2 = 4\pi x^2$$

$$\text{مساحت کره} = S_{(x)} = 4\pi x^4 \Rightarrow \frac{ds}{dx} = 4\pi \cdot 2x = 8\pi x$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{4\pi x^2}{8\pi x} \Rightarrow \frac{dv}{ds} = \frac{1}{2}x$$

مثال4: بین درجه سانتی گرید (C) و فارنهایت (F) رابطهٔ $C = \frac{5}{9}(F-32)$ موجود است. شما نسبت متوسط بین (C) و (F) را تعیین کنید.

حل: نظر به تعریف سرعت متوسط $(V_m = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x})$ می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{\Delta C}{\Delta F} = \frac{C(F+\Delta F)-C(F)}{\Delta F} = \frac{\frac{5}{9}(F+\Delta F-32)-\frac{5}{9}(F-32)}{\Delta F} = \frac{5}{9}$$

مثال5: محیط یک زمین مستطیل شکل $200m$ است، مساحت اعظمی آن را پیدا کنید.

حل: مستطیل‌های زیادی را می‌توان با این محیط رسم نمود اما شرط این است که مساحت کدام مستطیل به کدام طول و عرض از همه زیادتر است. طول مستطیل را به x و عرض آن را به y نشان می‌دهیم بنابرین می‌توانیم بنویسیم:

$$\text{محیط} = 2x+2y = 200$$

$$\text{محیط} = x+y = 100 \quad \Rightarrow y = 100-x$$

$$\text{مساحت} = x \cdot y$$

$$S = x(100-x) = 100x - x^2 \quad , \quad D_s = IR$$

$$x > 0 \quad , \quad y > 0 \Rightarrow 100 - x > 0 \quad \Rightarrow x < 100$$

اکنون مساحت اعظمی تابع $S = 100x - x^2$ را در انتروال $0 < x < 100$ این طور دریافت می کنیم:

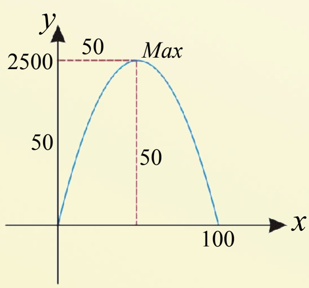
$$S' = 100 - 2x$$

$$S' = 0 \Rightarrow 100 - 2x = 0 \quad \Rightarrow x = 50 \quad \Rightarrow S_{(50)} = 2500$$

$$\lim_{x\to 0^+} S(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} S(x) = 0$$

x	0	50	100
S'	+	0	−
S	0 ↗	2500	↘ 0



در نتیجه از شکل دیده می‌شود که بزرگ‌ترین مساحت نسبت به همه، زمانی موجود است که طول و عرض مستطیل 50 واحد باشد، مساحت آن 2500 واحد مربع می‌شود.

مثال6: اگر مجموع دو عدد 200 باشد، آن اعداد را طوری تعیین کنید که مجموع مربعات‌شان اصغری شود.

حل: اگر اعداد مذکور x و y باشند، بنابرآن $x+y=200$ است. حال اگر $x^2+y^2=T$ فرض نماییم لذا:

$$
\begin{aligned}
T_{(x)} &= x^2+y^2\\
&= x^2+(200-x)^2\\
&= x^2+x^2-400x+(200)^2\\
&= 2x^2-400x+40000
\end{aligned}
$$

$$T'_{(x)}=4x-400$$

$$T'_{(x)}=0$$

$$4x-400=0$$

$$x=100$$

در نتیجه گفته می‌توانیم که مجموعهٔ کوچک‌ترین مربعات عبارت است از: $T_{(100)}=20000$

مثال7: نقطهٔ A بالای منحنی $y=\dfrac{2}{x}$ حرکت می‌کند. کوچک‌ترین انتروال بین نقطهٔ A و مبدأ کمیات وضعیه را تعیین کنید.

حل: مختصات نقطهٔ A بالای منحنی $y=\dfrac{2}{x}$ عبارت از $A(x,\dfrac{2}{x})$ است، بنابرآن:

$$\overline{OA}=\sqrt{x^2{}_{(A)}+y^2{}_{(A)}}=\sqrt{x^2+\frac{4}{x^2}}$$

$$\overline{OA}^2=x^2+\frac{4}{x^2}=d^2 \Rightarrow d'_{(x)}=(x^2)'+(\frac{4}{x^2})'=2x-\frac{8x}{x^4}=2x-\frac{8}{x^3}$$

$$d'_{(x)}=\frac{2x^4-8}{x^3}$$

$$d'_{(x)}=0$$

$$2x^4=8$$

$$x_1=\sqrt{2} \quad , \quad x_2=-\sqrt{2}$$

$$d_{\sqrt{2}}=(\sqrt{2})^2+\frac{4}{(\sqrt{2})^2}=2+\frac{4}{2}=\frac{8}{2}=4$$

$$d_{-\sqrt{2}}=4$$

در نتیجه، کوچک‌ترین فاصله از مبدا 2 واحد است.

مثال8: یک مکعب مستطیل را که قاعدهٔ آن مربع است در نظر بگیرید، اگر مجموعهٔ سه بُعد آن 24 باشد، بزرگ‌ترین حجم مکعب مستطیل را دریافت کنید.

حل: اگر ضلع قاعده را x و ارتفاع را y بگوییم، بنابرین داریم:

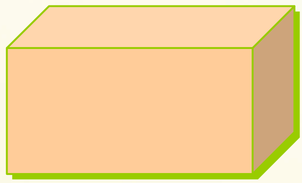
$$x + x + y = 24 \quad \Rightarrow \quad y = 24 - 2x$$

چون $y \geq 0$ است، $0 \leq x \leq 12$ می‌شود و حجم مکعب مستطیل عبارت است از:

$$V = x^2 \cdot y \Rightarrow V = x^2(24 - 2x) = 24x^2 - 2x^3$$

$$\begin{aligned}
V &= 24x^2 - 2x^3 \\
V'(x) &= 48x - 6x^2 \\
V'(x) &= 0 \\
48x - 6x^2 &= 0 \\
x(48 - 6x) &= 0 \\
x_1 &= 0 \\
48 - 6x &= 0 \\
-6x &= -48 \\
x &= 8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(0) &= 24 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0^3 \\
&= 0 - 0 = 0 \\
V'(0) &= 0 \\
V(8) &= 24 \cdot (8)^2 - 2 \cdot (8)^3 \\
&= 1536 - 1024 = 512 \\
V(8) &= 512 \\
V(12) &= 24 \cdot (12)^2 - 2 \cdot (12)^3 = 3456 - 3456 = 0 \\
V(12) &= 0
\end{aligned}$$



بنابرآن، بزرگ‌ترین حجم مکعب مستطیل $512cm^3$ است.

تمرین

1- تحولات تابع $y = x^3 + x^2 + x + 1$ را دریافت و منحنی آن را رسم کنید.

2- از یک تخته آهن چادر مربعی که هر ضلع آن $1m$ طول دارد، یک بکس سرباز ساخته می‌شود. از چهار کنج آن چهار مربع مساوی خُرد ببرید و بعد آن‌را قات کنید. مربع‌های خُرد باید به کدام اندازه بریده شوند تا بکس مذکور حجم اعظمی ممکن را داشته باشد.

3- نزدیک‌ترین نقطه گراف $y = x^2$ را به نقطه $A(3,0)$ دریافت کنید.

نکات مهم فصل سوم

- یک تابع زمانی متزاید گفته می‌شود که تابع $f(x)$ در انتروال $[a,b]$ متمادی و در انتروال (a,b) مشتق‌پذیر و $f'(x)>0$ باشد.
- یک تابع زمانی متناقص گفته می‌شود که تابع $f(x)$ در انتروال $[a,b]$ متمادی و در انتروال (a,b) مشتق‌پذیر و $f'(x)<0$ باشد.
- متزاید بودن یک تابع به این معنا است که با تزاید متحول x قیمت تابع نیز زیاد می‌شود و متناقص بودن تابع به این معنا است که هرگاه متحول x تزاید نماید قیمت تابع کم می‌شود.
- در یک تابع بلندترین نقطه به‌نام اعظمی (Maximum) و پایین‌ترین نقطه به‌نام اصغری (Minimum) یاد می‌شود. و هر دو نقطه به‌نام نقاط بحرانی یا نقاط Extreme یاد می‌شوند.
- **Maximum مطلق:** نقطهٔ $(x_0, f(x_0))$ به‌نام اعظمی مطلق یاد می‌شود. هرگاه در هر ساحه تعریف برای هر x، $f(x)\le f(x_0)$ باشد؛ $f(x_0)$ را اعظمی مطلق گویند.
- **Minimum مطلق:** نقطهٔ $(x_0, f(x_0))$ را اصغری مطلق گویند. هرگاه در هر ساحه تعریف $f(x)$ برای هر x، $f(x)\ge f(x_0)$ باشد؛ $f(x_0)$ را اصغری مطلق گویند.
- منحنی تابع $y=f(x)$ در یک انتروال محدب گفته می‌شود هرگاه در این انتروال به منحنی مماس رسم شود و این مماس در قسمت بالایی منحنی واقع باشد. در این صورت، مشتق دوم تابع یعنی $f''(x)<0$ منفی به‌دست می‌آید.
- منحنی تابع $y=f(x)$ در یک انتروال مقعر می‌باشد در صورتی که در این انتروال به منحنی مماس رسم شود و منحنی در بالای مماس واقع گردد، در این حالت مشتق دوم تابع یعنی $f''(x)>0$ مثبت به‌دست می‌آید.
- نقاطی که تابع را از محدبیت به مقعریت و یا برعکس خود تغییر می‌دهد. به‌نام نقاط انعطاف یا نقاط Inflection یاد می‌شود.
- توابعی که شکل $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ را داشته باشد، به‌نام توابع هوموگرافیک یاد می‌شود؛ به شرط اینکه: $c\neq 0$ باشد.

- هرگـاه تـابع $f(x)$ در انتـروال $a \le x \le b$ متمـادی و در انتـروال $a < x < b$ مـشتق‌پـذیر و $f(a) = f(b)$ باشـد؛ پـس کـم از کـم یـک نقطـه x_0 در انتـروال $a < x < b$ وجـود دارد طوری‌که $f'(x_0) = 0$ است و این قضیه به نام قضیهٔ رول یاد می‌شود.
- هرگاه تابع $f(x)$ در انتروال $[a,b]$ متمادی و در انتـروال (a,b) مـشتق‌پـذیر باشـد؛ پـس یـک عـدد x_0 در وسـط a و b طـوری‌کـه $a < x_0 < b$ باشـد، وجـود دارد و $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ است که به‌نام قضیهٔ قیمت متوسط یاد می‌شود.
- **قاعدهٔ هوپیتال:** اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ در انتروال (a,b) تعریف و مشتق‌پذیر باشد.

هرگاه لیمت نسبت $\frac{f(x)}{g(x)}$ به قیمت $x = a$ شکل مبهم $\frac{0}{0}$ را و به قیمـت $x = \infty$ شـکل مـبهم $\frac{\infty}{\infty}$ را اختیار نماید، جهت دریافت قیمـت حـد(لیمـت تـابع)، مـشتق $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ را دریافـت نمـوده قیمـت گذاری می‌نماییم اما اگر باز هم نسبت توابع مذکور در شـکل مـبهم قـرار داشـته باشـد مـشتق دوم، سوم ...n–ام آنرا دریافت می‌کنیم تا رفع ابهام گردد.

تمرینات عمومی فصل سوم

به سوالات زیر چهار جواب داده شده است. شما جواب صحیح را انتخاب کنید.

1- اگر یک تابع در انتروال $[0,b]$ متمادی و مشتق‌پذیر باشد این تابع وقتی متزاید است که:

$a)\ f(x)=0 \qquad b)\ f(x)<0 \qquad c)\ f'(x)>0 \qquad d)\ f(x)\geq 0$

2- در یک تابع بلندترین نقطه را:

$a)$ Minimum می گویند $b)$ Infliction می گویند $c)$ Maximum می‌گویند $d)$ هیچکدام

3- نقاط بحرانی تابع $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x}$ عبارت است از:

$a)$ دو نقطه $b)$ یک نقطه $c)$ سه نقطه $d)$ ندارد

4 – نقطه‌یی که تابع خود را از محدبیت به مقعریت تبدیل می کند:

$a)$ نقطهٔ اعظمی $b)$ نقطهٔ انعطاف $c)$ نقطهٔ اصغری $d)$ هیچکدام

5- ساحهٔ تعریف تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ عبارت است از:

$a)\ (-\infty\ ,+\infty) \qquad b)\ (-\infty\ ,0) \qquad c)\ (0,-\infty)$ $\quad d)$ هیچکدام

6- مجانب عمودی تابع $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$ عبارت است از:

$a)\ x=1 \qquad b)\ x=2 \qquad c)\ x=-1 \qquad d)\ x=-2$

7- مجانب عمودی توابع هوموگرافیک عبارت است از:

$a)\ y=\dfrac{a}{c} \qquad b)\ x=-\dfrac{d}{c} \qquad c)\ y=\dfrac{c}{a} \qquad d)\ y=-\dfrac{c}{d}$

8- مجانب افقی تابع $g(x)=\dfrac{4x^2-6x}{x^2-4}$ عبارت است از:

$a)\ 4 \qquad b)\ 6 \qquad c)\ -6 \qquad d)\ -4$

9- از روابط زیر، کدام یک درست است:

$a)\ \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \qquad b)\ \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f'(x) \qquad c)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ $\quad d)$ هیچکدام

سوالات زیر را حل نمایید.

1. میل منحنی تابع $f(x)=x^2-x$ را در نقطهٔ $P(3,0)$ تعیین کنید؟

2. در تابع $f(x)=-x^2$ تغییرات متوسط را در انتروال $[3,4]$ پیدا کنید؟

3. با استفاده از خارج قسمت نیوتن مشتق توابع زیر را دریابید:

1) $f(x)=2x$ 2) $f(x)=3x^2-1$ 3) $f(x)=\sqrt{2}x$

4. در نقاط داده شده مشتق توابع زیر را پیدا کنید:

1) $f(x)=2x-1$, $x_0=-1$ 2) $f(x)=x^2$, $x_0=2$

5. مشتق توابع زیر را دریابید:

1) $f(x)=2x-4x^2$ 2) $f(x)=3x^3-1$

6. در نقاط داد شده مشتق توابع زیر را دریابید:

1) $f(x)=7x^2-3x$, $x_0=-1$

2) $f(x)=6x^2-2x-1$, $x_0=\frac{1}{2}$

7. از تابع $f(x)=3x^5-4x^2-3x$ چهار مرتبه مشتق گرفته و گراف آن را رسم نمایید.

8. مشتق توابع زیر را دریابید.

1) $f(x)=x^3\sec x$ 2) $f(x)=\sin(3x-1)$ 3) $f(x)=\cos^2 2x$

9. کدام عدد مثبت با معکوس خود جمع گردد، حاصل جمع آن‌ها از هر دو عدد کوچک‌تر می‌شود؟

10. گراف تابع $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$ را رسم کنید.

11. گراف تابع $f(x)=\dfrac{4x^2}{x^2+1}$ را رسم کنید.

12. گراف تابع مثلثاتی $y=\sin x$ را رسم کنید.

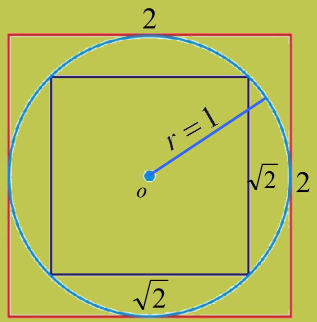
13. گراف تابع مثلثاتی $y=\tan x$ را رسم کنید.

فصل چهارم

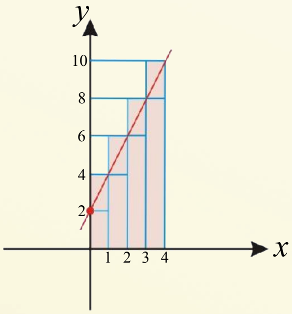
انتیگرال‌ها

مجموع ریمان

Riemann's Sum



مساحت چهارضلعی محیطی و محاطی دایرهٔ مقابل را که دارای شعاع یک واحد طول است، حساب کنید و بگویید که مساحت این دایره چه رابطه‌یی با مساحت چهارضلعی‌های مقابل دارد.



• گراف تابع $f(x)=2x+2$ را در انتروال $[0,4]$ رسم و سطح محصور شدهٔ آن‌را خط خط کنید.

• مجموع مساحت‌های چهار مستطیل تحتانی و مجموع مساحت‌های چهار مستطیل فوقانی گراف تابع $y=2x+2$ را که در شکل نشان داده شده اند، دریافت کنید.

• مجموع مساحت‌های مستطیل‌های تحتانی و مجموع مساحت‌های مستطیل‌های فوقانی با مساحت تحت گراف تابع در فاصلهٔ داده شده چه رابطه‌یی دارند؟

• عین فعالیت بالا را این بار با هشت مستطیل مساوی تحتانی و هشت مستطیل مساوی فوقانی تکرار و نتیجه را با مساحت تحت گراف در فاصلهٔ مذکور مقایسه کنید.

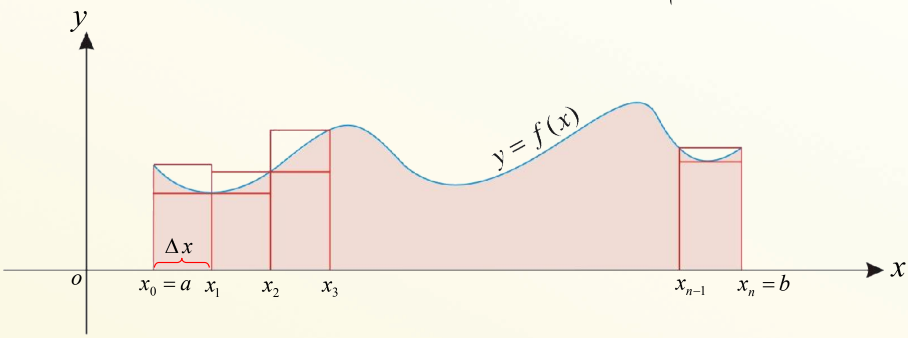
• هرگاه تقسیم فاصله را به‌خاطر تشکیل مستطیل‌های[1] تحتانی و فوقانی گراف تابع بیشتر ساخته برویم، قیمت مجموعی مساحت‌های مستطیل‌های تحتانی و قیمت مجموعی مساحت‌های مستطیل‌های فوقانی به کدام قیمت نزدیک شده می‌روند؟

از فعالیت فوق، این تعریف به دست می‌آید:

---

[1] هرگاه تقسیمات فواصل بالای محور x بیشتر شود یا به عبارهٔ دیگر، به هر اندازه که تعداد مستطیل‌ها زیاد شود به همان اندازه مساحت تحت گراف دقیق‌تر به دست می آید.

تعریف: فرض کنیم تابع $y=f(x)$ در انتروال بستهٔ $[a,b]$ متمادی و تعریف شده است اگر بخواهیم مساحت ناحیهٔ واقع بین محور x و منحنی تابع $y=f(x)$ را که قابل تبدیل به اشکال هندسی نیست، محاسبه کنیم:



انتروال بستهٔ $[a,b]$ را به n مستطیل‌ها تقسیم می‌کنیم، طوری که عرض مستطیل‌ها از رابطه $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$ به دست می‌آید و طول این مستطیل‌ها عبارت از قیمت تابع در همان نقطه است.

طول هر انتروال این مستطیل‌ها برای $i=1,\ 2,\ \dots\ ,n$ قرار زیر است:

$$x_0=a, x_1=a+\Delta x, x_2=a+2\Delta x\dots, x_i=a+i\Delta x,\ \dots\ , x_n=b$$

$$[x_0,x_1]\ ,\ [x_1,x_2]\ ,\ [x_2,x_3],\ \dots\ ,[x_{i-1},x_i],\ \dots\ ,[x_{n-1},x_n]$$

اگر مساحت‌های مستطیل‌های تحتانی شکل را به $f(x_{i-1})\Delta x$ و مساحت مستطیل‌های فوقانی شکل بالا را به $f(x_i)\Delta x$ نشان دهیم، داریم که:

مجموع مساحت‌های مستطیل‌های تحتانی $=f(x_0)\Delta x+f(x_1)\Delta x+\ \dots\ +f(x_{n-1})\Delta x=\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$

مجموع مساحت‌های مستطیل‌های فوقانی $=f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+\ \dots\ +f(x_n)\Delta x=\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

اگر مساحت محصورشده را به A نشان دهیم، داریم که: $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x<A<\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

حال اگر از اطراف رابطهٔ بالا لیمت بگیریم، داریم که:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x\le\lim_{n\to\infty} A\le\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

نظر به قضیهٔ ساندویچ داریم که: $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$

پس $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ را مجموع ریمان و اگر از آن مجموع لیمت بگیریم، $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ را لیمت مجموع ریمان گویند.

مثال 1: با تقسیم نمودن انتروال $[0,2]$ به چهار قسمت مساوی، مساحت بین منحنی تابع $y = x^2 + 1$ و محور x را دریابید.

حل: اگر انتروال $[0,2]$ را به چهار قسمت مساوی تقسیم کنیم، عرض مستطیل‌ها چنین به دست می‌آید:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$$

طول هر انتروال این مستطیل‌ها عبارت است از:

$$x_0 = a = 0 \quad , \quad x_1 = a + \Delta x = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = a + 2\Delta x = 1 \quad , \quad x_3 = a + 3\Delta x = \frac{3}{2}$$

$$x_4 = 2$$

$$[x_0, x_1] \quad , \quad [x_1, x_2] \quad , \quad [x_2, x_3],[x_3, x_4]$$

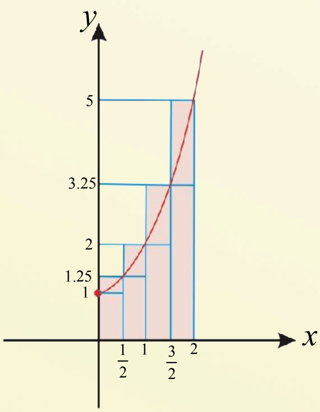
$$[0,\frac{1}{2}] \quad , \quad [\frac{1}{2},1] \quad , \quad [1,\frac{3}{2}] \quad ,[\frac{3}{2},2]$$

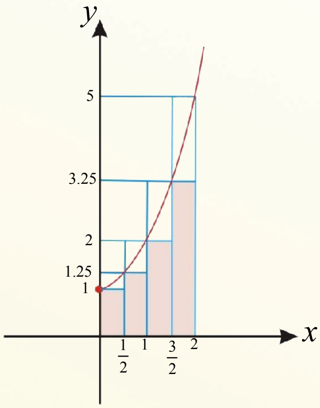
قیمت‌های به‌دست آمده را به عوض x در تابع وضع می‌کنیم:

$$f(x) = x^2 + 1 \; , f(0) = 1$$

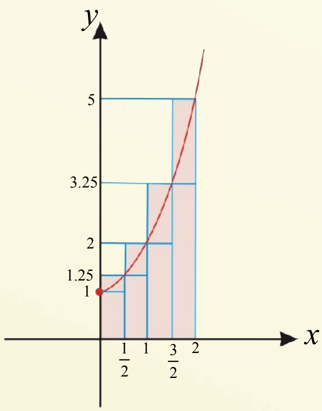
$$f(\frac{1}{2}) = 1.25 \; , \; f(1) = 2$$

$$f(\frac{3}{2}) = 3.25 \; , \; f(2) = 5$$





$$= 1\cdot\frac{1}{2} + 1.25\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{2} + 3.25\cdot\frac{1}{2} = 3.75$$ مجموع مساحت‌های مستطیل‌های تحتانی



$$= 1.25\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{2} + 3.25\cdot\frac{1}{2} + 5\cdot\frac{1}{2} = 5.75$$ مجموع مساحت‌های مستطیل‌های فوقانی

$$3.75 < A < 5.75$$

مثال2: لیمت مجموع ریمان را برای تابع $f(x) = 1 + x$ در انتروال $[1,10]$ دریابید.

حل:

یادداشت:

$$\sum_{i=1}^{n} c = cn$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{10-1}{n} = \frac{9}{n}$$

$$x_i = a + \Delta x i = 1 + [\frac{9}{n}]\, i \quad , \quad i = 0,1,2,......$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty}[\sum_{i=1}^{n}(1+x_i)\Delta x]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[\Delta x\sum_{i=1}^{n}(1+x_i)]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[\Delta x\sum_{i=1}^{n}1 + \Delta x\sum_{i=1}^{n}x_i]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}1 + \Delta x\sum_{i=1}^{n}(a+\Delta x i)]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}1 + \frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}(1+\frac{9}{n}i)]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}1 + \frac{9}{n}(\sum_{i=1}^{n}1 + \frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}i)]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[\frac{9}{n}\cdot n + \frac{9}{n}(n + \frac{9}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2})]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[9 + \frac{9}{n}(n + \frac{9n^2+9n}{2n})]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[9 + \frac{9}{n}(\frac{2n^2+9n^2+9n}{2n})]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[9 + \frac{9}{n}(\frac{11n^2+9n}{2n})]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[9 + \frac{99n^2+81n}{2n^2}]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[9 + \frac{99n^2}{2n^2} + \frac{81n}{2n^2}]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[9 + \frac{99}{2} + \frac{81}{2n}]$$

$$= 9 + \frac{99}{2} = 58.5$$

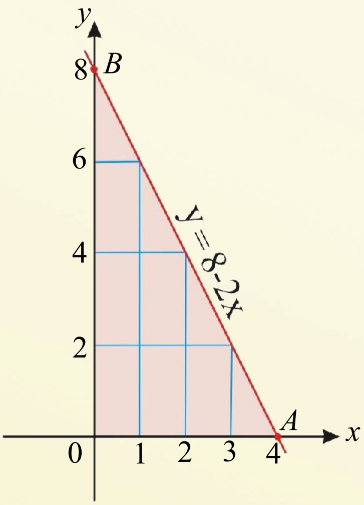
تمرین

1- با تقسیم نمودن انتروال $[0,3]$ به شش قسمت مساوی، مساحت محصور بین خط $y=3x$ و محور x را محاسبه کنید.

2- برای $\Delta x = 0.5$ و با در نظر داشت قیمت‌های داده شده، جدول گراف زیر را رسم و مجموع مساحت‌های مستطیل‌های تحتانی و فوقانی آن‌را حساب کنید:

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
y	14	20	26	32	38	44	50

3- مساحت مثلث OAB تحت خط $y=8-2x$ شکل زیر را در انتروال $[0,4]$ با استفاده از لیمت مجموع ریمان دریابید.



مفهوم انتیگرال

Concept of Integral

همان‌طور که می‌دانید، مساحت تحتانی و فوقانی اشکال توسط انتیگرال محاسبه می گردد.

آیا می توان مساحت فوقانی تصویر مقابل را دریافت کرد؟

تابعی که مشتق آن معین باشد و یا به عبارهٔ دیگر، لیمت مجموع ریمان را انتیگرال گویند. علامهٔ انتیگرال $(\int)$ می‌باشد که کش شدهٔ حرف S کلمهٔ sum یا مجموع ریمان است. به طور مثال $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int f(x)dx$ که در اینجا $f(x)$ را تابع و dx را متغیر انتیگرال گیری نظر به متحول x گویند.

به طور معمول انتیگرال‌ها دو نوع اند؛ انتیگرال غیرمعین و معین که به ترتیب، به مطالعهٔ هر یک از آن‌ها می‌پردازیم:

1- انتیگرال غیرمعین ***Indefinite Integral***

- اگر تابع $F(x) = 2x^2 - 1$ باشد، از تابع داده شده مشتق بگیرید؟
- از حاصل مشتق به دست آمده، دوباره انتیگرال بگیرید.
- حاصل انتیگرال به دست آمده را با تابع اولیه مقایسه و بگویید که (-1) در تابع مذکور به نام چه یاد می‌شود؟
- اگر (-1) را در تابع فوق C بنامیم، تابع $f(x)$ مساوی به چیست؟
- فعالیت فوق را برای تابع $F(x) = x^6 + 1$ تکرار کنید و بگویید که $f(x)$ مساوی به چیست؟

از فعالیت صفحهٔ قبل، تعریف زیر به دست می‌آید:

تعریف: هرگاه تابع $f(x)$ در انتروال بستهٔ $[a,b]$ تعریف شده و $F(x)$ یک تابع اولیه از $f(x)$ باشد، ست توابع $F(x)+C$ را در حالی‌که C یک عدد ثابت اختیاری است، به نام انتیگرال غیرمعین از $f(x)$ یاد می‌کنند و می‌نویسند:

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

مثال 1: $\int x\ dx$ را دریابید.

حل:

$$\int x\ dx = \frac{x^{1+1}}{1+1}+C = \frac{x^2}{2}+C$$

مثال 2: $\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}}\ dx$ را حساب کنید.

حل:

$$\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}}\ dx = \int x^{-\frac{3}{7}}\ dx = \frac{x^{-\frac{3}{7}+1}}{-\frac{3}{7}+1}+C = \frac{x^{\frac{4}{7}}}{\frac{4}{7}}+C = \frac{7}{4}\sqrt[7]{x^4}+C$$

مثال 3: $\int x^{\frac{3}{2}}\ dx$ را دریابید.

حل:

$$\int x^{\frac{3}{2}}\ dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}+C = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+C = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C = \frac{2}{5}\sqrt{x^5}+C$$

تمرین

انتیگرال‌های زیر را محاسبه کنید:

$a)\ \int \sqrt[5]{x^3}\ dx$

$b)\ \int \frac{1}{x^4}\ dx$

$c)\ \int \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx$

$d)\ \int \frac{x^2\ dx}{\sqrt[4]{x^2}}$

$e)\ \int \sqrt[8]{x^4}\cdot x\ dx$

خواص انتیگرال غیر معین

Properties of Indefinite Integral

خواص لیمت و مشتق را پیش از این مطالعه نموده‌اید، آیا این خواص در انتیگرال‌های غیر معین نیز موجود می‌باشد؟

$$\left.\begin{array}{l} \int k\ dx \\ \int [f(x) \pm g(x)]\ dx \\ \int [f(x) \cdot g(x)]\ dx \\ \int \dfrac{f(x)}{g(x)} dx \quad , g(x) \neq 0 \end{array}\right\} = ?$$

- با استفاده از خواص مشتق، مشتقات توابع زیر را دریابید:

$$f(x) = 3x^4$$

$$f(x) = 2x^3 - \frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = \sin x + \cos x$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

از فعالیت فوق نتیجهٔ زیر به دست می‌آید:

همان‌طورکه برای دریافت مشتق توابع از قوانین یا خواص مشخص استفاده می‌شد، انتیگرال‌های غیر معین نیز دارای خواصی اند که آنها را بدون ثبوت قبول می‌کنیم.

1- اگر k یک عدد ثابت باشد، داریم که:

$$\int kdx = k \int dx = kx + C$$

مثال: $\int 5dx$ را دریابید؟

حل: $\int 5dx = 5 \int dx = 5x + C$

2- اگر $n \neq -1$ باشد، پس داریم: $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$

مثال: $\int x^4\,dx$ را دریابید؟

حل: $\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{1}{5}x^5 + C$

3- اگر a یک عدد ثابت و $f(x)$ تابع باشد، پس:

$$\int a\,f(x)\,dx = a\int f(x)dx$$

مثال: $\int 2x^2\,dx$ را دریابید؟

حل: $\int 2x^2 dx = 2\int x^2 dx = 2\frac{x^3}{3} + C = \frac{2}{3}x^3 + C$

4- اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند، در این صورت حاصل جمع و حاصل تفریق توابع تحت انتیگرال مساوی است با حاصل جمع و حاصل تفریق انتیگرال‌ها به طور جداگانه:

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

مثال ها:

$$\int (2x^2+3)dx = \int 2x^2 dx + \int 3dx = \frac{2}{3}x^3 + 3x + C$$

$$\int (8-2x)dx = 8\int dx - 2\int xdx = 8x - x^2 + C$$

5- اگر یک ترادف توابع تحت انتیگرال باشد، در این صورت انتیگرال آن مساوی است با مجموع انتیگرال هر حد آن:

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \ldots + \int f_n(x)dx$$

مثال:

$$\int [x^3 - 6x^2 + 9x + 1]\,dx = \int x^3 dx - \int 6x^2 dx + \int 9xdx + \int dx$$
$$= \frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} + x + C$$

6- اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند، در این صورت حاصل ضرب دو تابع تحت انتیگرال مساوی نیست با حاصل ضرب انتیگرال‌های توابع به‌طور جداگانه:

$$\int [f(x)\cdot g(x)]\,dx \neq \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx$$

مثال: اگر $f(x)=x+1$ و $g(x)=x-2$ باشد.

حل الف: ابتدا برای دریافت انتیگرال، عملیهٔ ضرب دو تابع را اجرا کرده و بعدا از آن انتیگرال می‌گیریم:

$$\begin{aligned}\int[f(x)\cdot g(x)]\,dx &= \int[(x+1)(x-2)]dx=\int(x^2-2x+x-2)\,dx\\ &=\int(x^2-x-2)\,dx\\ &=\int x^2dx-\int x\,dx-\int 2\,dx\\ &=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+C\end{aligned}$$

حل ب: حال برای دریافت انتیگرال از هر تابع جداگانه انتیگرال گرفته و بعد از آن هر دو حل را با هم مقایسه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx\cdot\int g(x)\,dx &= \int(x+1)\,dx\cdot\int(x-2)\,dx=(\int x\,dx+\int dx)(\int x\,dx-\int 2\,dx)\\ &=(\frac{x^2}{2}+x+C)(\frac{x^2}{2}-2x+C)=(\frac{x^2}{2}+x)(\frac{x^2}{2}-2x)+C\\ &\Rightarrow\ \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+C\neq(\frac{x^2}{2}+x)(\frac{x^2}{2}-2x)+C\end{aligned}$$

در نتیجه به مشاهده می‌رسد که مساوات فوق حقیقت ندارد.

7- اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند، در این صورت انتیگرال حاصل تقسیم دو تابع مساوی نیست با حاصل تقسیم انتیگرال‌های هر یک از آنها:

$$\int\frac{f(x)}{g(x)}dx\neq\frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}\quad,\quad g(x)\neq 0$$

مثال: اگر $f(x)=x^2+2x$ و $g(x)=x$ باشد.

حل الف: ابتدا انتیگرال حاصل تقسیم دو تابع را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\int\frac{f(x)}{g(x)}dx &= \int\frac{x^2+2x}{x}\,dx=\int\frac{x(x+2)}{x}\,dx\\ &=\int(x+2)\,dx=\frac{x^2}{2}+2x+C\end{aligned}$$

حل ب: حال انتیگرال صورت و مخرج را جداگانه دریافت نموده بعد هر دو حل را با هم مقایسه می‌کنیم:

$$\frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}=\frac{\int (x^2+2x)dx}{\int xdx}=\frac{\int x^2dx+\int 2xdx}{\int xdx}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}x^3+x^2}{\frac{1}{2}x^2}+C=\frac{\frac{1}{3}x^3}{\frac{1}{2}x^2}+\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}+C$$

$$\int\frac{f(x)}{g(x)}dx\neq\frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$$

در نتیجه، معلوم می‌شود که مساوات فوق حقیقت ندارد.

تمرین

از خواص انتیگرال استفاده نموده، انتیگرال‌های زیر را به دست آورید:

a) $\int -17\,dx=?$

b) $\int \frac{(1+x)^2}{1+x}\,dx=?$

c) $\int 2x^4dx=?$

d) $\int \frac{1}{x^5}\,dx=?$

e) $\int (2x^2+4x^3-5x+9)\,dx=?$

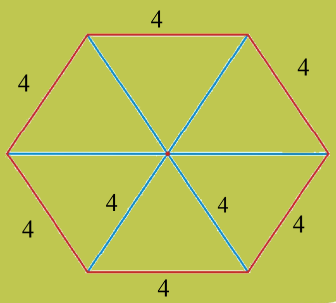
f) $\int (2x+3)^6\,dx=?$

g) $\int \frac{x^3+2x^2}{x^2}\,dx=?$

h) $\int (2+x)\,dx=?$

انتیگرال معین

Definite Integral



مجموع مساحت‌های تمام مثلث‌های داخل شش‌ضلعی را دریافته و با مساحت شش‌ضلعی مقایسه کنید.

- گراف تابع $f(x)=2x$ را در انتروال $[2,5]$ برای $n=5$ رسم نموده و مساحت تحتانی آن‌را دریابید.
- در شکل مساحت تحت گراف بین کدام دو عدد محدود گردیده است؟

از فعالیت فوق تعریف زیر را می‌توان بیان کرد:

تعریف: لیمت مجموع ریمان تابع $f(x)$ در انتروال بستهٔ $[a,b]$ وقتی که عدد n به بی‌نهایت تقرب کند و بزرگ‌ترین طول انتروال‌های فرعی (Δx) به صفر نزدیک گردد به نام انتیگرال معین تابع $f(x)$ از $x=a$ تا $x=b$ یاد می‌شود؛ یعنی: $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x=\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$

که در اینجا a را سرحد پایینی و b را سرحد بالایی انتیگرال گویند.

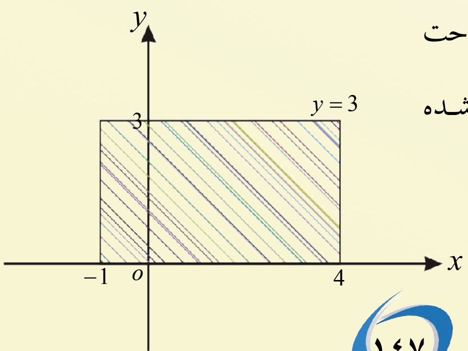
مثال 1: قیمت انتیگرال $\int_1^3 x^2dx$ را دریابید.

حل:

$$\int_1^3 x^2dx=[\frac{x^3}{3}]_1^3=\frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3}=\frac{27-1}{3}=\frac{26}{3}$$

مثال 2: مساحت محصور توسط خط $y=3$ و محور x در انتروال $[-1,4]$ را حساب کنید.

حل: انتیگرال معین $\int_{-1}^{4} 3\,dx$ نشان دهندهٔ مساحت مستطیل است که در شکل مقابل نشان داده شده است.



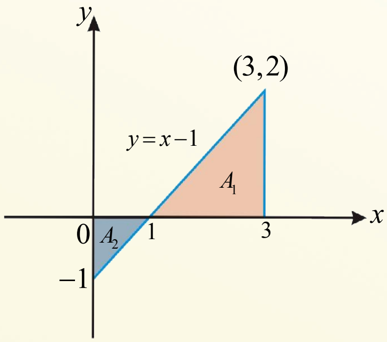
مساحت این مستطیل مساوی است با حاصل ضرب طول در عرض آن:

$$\text{مساحت مستطیل} = 3(4-(-1)) = 3\cdot 5 = 15$$

با استفاده از انتیگرال داریم که:

$$\int_{-1}^{4} 3\ dx = [3x]_{-1}^{4} = 3(4+1) = 3\cdot 5 = 15$$

مثال 3: مساحت محصور شده توسط خط $y = x-1$ و محور x را در انتروال $[0,3]$ دریابید.



حل:

با استفاده از شکل، اول مساحت مثلث بزرگ یعنی طرف راست را به دست می‌آوریم:

$$A_1 = \frac{1}{2}(2\cdot 2) = \frac{1}{2}\cdot 4 = 2$$

مساحت مثلث کوچک عبارت است از:

$$A_2 = \frac{1}{2}[1(-1)] = \frac{1}{2}(-1) = -\frac{1}{2}$$

مجموع مساحت‌های A_1 و A_2 مساوی است با:

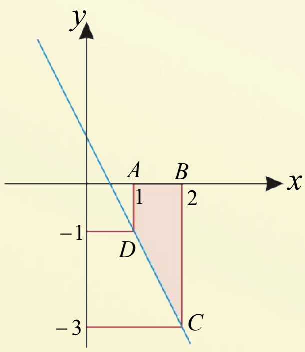
$$A_1 + A_2 = 2 - \frac{1}{2} = 1.5$$

در نتیجه، قیمت انتیگرال مورد نظر عبارت است از:

$$\int_0^3 (x-1)\ dx = [\frac{x^2}{2} - x]_0^3 = [\frac{3^2}{2} - 3] - 0 = \frac{9}{2} - 3 = 1.5$$

تمرین

1- با استفاده از شکل مقابل مساحت محصور بین خط $y = -2x+1$ و محور x را در انتروال $(1,2)$ محاسبه کنید.



2- مجموع مساحت‌های مستطیل‌های تحتانی و فوقانی تابع $f(x) = x^2$ را در انتروال $[0,1]$ و $n = 4$ حساب کنید.

خواص انتیگرال معین

Properties of definite Integral

آیا با استفاده از خواص انتیگرال غیرمعین می‌توان رابطه‌های مقابل را تکمیل نمود؟

$$\left.\begin{array}{l}\int_a^b c\,dx \\[2ex] \int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx \\[2ex] \int_a^a f(x)\,dx\end{array}\right\} = ?$$

فعالیت

- مجموعهٔ $\sum_{k=1}^{4} 3k^2$ را حساب کنید.
- قیمت $\int_a^b x\,dx$ را در انتروال $[-1,1]$ دریابید.
- قیمت $\int_0^2 (1+3x)dx$ را محاسبه کنید.

از فعالیت فوق نتیجهٔ زیر را می‌یابیم که:

محاسبهٔ بعضی از انتیگرال‌ها با گذاشتن قیمت امکان‌پذیر می‌شود، اما از بعضی از آنها امکان‌پذیر نیست؛ بنابرین برای حل آنها ضرورت است که خواص انتیگرال‌های معین را ثبوت کنیم:

1- $\int_a^b Cdx$ عبارت از انتیگرال تابع ثابت C در انتروال $[a,b]$ است.

$$\int_a^b C\,dx = C\int_a^b dx = C[x]_a^b = C(b-a)$$

ثبوت: انتروال $[a,b]$ را به n قسمت مساوی یعنی $\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n}$ تقسیم و برای هر عدد x_i از انتروال $i-$ ام داریم که: $i=0,1,2,\ \dots\ ,n$ $\qquad f(x_i)=C$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} C\,\Delta x_i = C(\Delta x_1+\Delta x_2+\dots+\Delta x_n) = C(\frac{b-a}{n}+\frac{b-a}{n}+\dots+\frac{b-a}{n})$$

$$= C(b-a)(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\dots+\frac{1}{n}) = C(b-a)\frac{n}{n} = C(b-a) \Rightarrow \int_a^b Cdx = C(b-a)$$

مثال: انتیگرال $\int_3^4 dx$ را محاسبه کنید.

حل: $\int_3^4 dx = [x]_3^4 = 4-3 = 1$

2- اگر $f(x)$ در انتروال $[a,b]$ انتیگرال‌پذیر و k یک عدد حقیقی ثابت باشد؛ در آن‌صورت داریم:

$$\int_a^b k\, f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

ثبوت:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} k\, f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} k\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$= k\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = k\int_a^b f(x)\,dx \;\Rightarrow\; \int_a^b k\, f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

مثال: انتیگرال معین $\int_{-2}^{2} 4\,dx$ را محاسبه نمایید.

$$\int_{-2}^{2} 4dx = 4\int_{-2}^{2} dx = 4[x]_{-2}^{2} = 4(2+2) = 4(4) = 16$$

3- اگر تابع $F(x)$ تابع اولیه از $f(x)$ و در انتروال $[a,b]$ متمادی باشد، در این صورت داریم:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

ثبوت:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) = -(-F(b)+F(a))$$

$$= -(F(a)-F(b)) = -\int_b^a f(x)\,dx \;\Rightarrow\; \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

مثال: تساوی انتیگرال $\int_3^2 2x\,dx = -\int_2^3 2x\,dx$ را حساب کنید.

حل: ابتدا انتیگرال طرف راست و بعد از آن طرف چپ مساوات را محاسبه می‌کنیم:

$$\int_2^3 2x\,dx = [\frac{2x^2}{2}]_2^3 = \frac{2(3)^2}{2} - \frac{2(2)^2}{2} = \frac{2(9)}{2} - \frac{2(4)}{2} = \frac{18}{2} - \frac{8}{2} = \frac{18-8}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\int_3^2 2x\,dx = [\frac{2x^2}{2}]_3^2 = \frac{2(2)^2}{2} - \frac{2(3)^2}{2} = \frac{2(4)}{2} - \frac{2(9)}{2} = \frac{8}{2} - \frac{18}{2} = \frac{8-18}{2} = -\frac{10}{2} = -5$$

با توجه به قیمت‌های به‌دست آمده، می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\int_{2}^{3} 2x\,dx = -\int_{3}^{2} 2x\,dx$$

4- اگر تابع $f(x)$ در انتروال $[a,b]$ متمادی باشد، در آن صورت داریم که:

$$\int_{a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

ثبوت: چون $\Delta x = 0$ است، بنابرآن داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_{a}^{a} f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$$

$$\Rightarrow \int_{a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

مثال: انتیگرال $\int_{3}^{3} 3x^2 dx$ را حساب کنید.

حل:

$$\int_{3}^{3} 3x^2 dx = [\frac{3x^3}{3}]_3^3 = [x^3]_3^3 = [3^3 - 3^3] = 27 - 27 = 0$$

5- اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع انتیگرال‌پذیر در انتروال $[a\ ,\ b]$ باشند، در آن صورت داریم:

$$\int_{a}^{b}[f(x) \pm g(x)]dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx \pm \int_{a}^{b} g(x)\ dx$$

ثبوت:

$$\int_{a}^{b}[f(x) \pm g(x)]dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[f(x_i) \pm g(x_i)]\ \Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty}[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \pm \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\Delta x]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \pm \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\Delta x = \int_{a}^{b} f(x)\,dx \pm \int_{a}^{b} g(x)\,dx$$

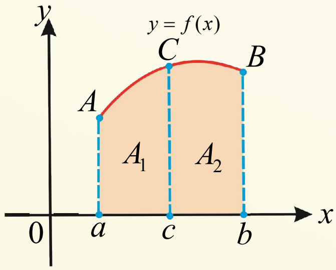
مثال ها:

$$a)\quad \int_{0}^{1}(4+3x^2)\,dx = \int_{0}^{1} 4\,dx + \int_{0}^{1} 3x^2\ dx\ = 4\int_{0}^{1} dx + 3\int_{0}^{1} x^2\ dx = 4[x]_0^1 + 3\ [\frac{x^3}{3}]_0^1 = 4 + 1 = 5$$

$$b)\quad \int_{0}^{3}\ (x^2 - 1)\,dx = \int_{0}^{3} x^2 dx - \int_{0}^{3} dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 - [x]_0^3 = \frac{27}{3} - 3 = \frac{27-9}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

6- اگر $f(x)$ در انتروال بسته‌یی (a,b) که شامل نقاط a ,b و c طوری که $a<c<b$ است، انتیگرال‌پذیر باشد داریم که:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$



ثبوت: در اینجا انتروال $[a,b]$ را مطابق شکل به دو انتروال $[a,c]$ و $[c,b]$ تقسیم نموده، انتیگرال $f(x)$ را در هر یک از این انتروال‌ها در نظر می‌گیریم. طبق مفهوم اصلی انتیگرال، $A=\int_a^b f(x)\,dx$ در حقیقت مساحت سطحی محصور بین گراف تابع $y=f(x)$ و محور x در انتروال $[a,b]$ است. در حالی که مساحت‌های سطوحی که بین همین گراف به ترتیب در انتروال‌های $[a,c]$ و $[c,b]$ با محور x محصور اند و در شکل واضح دیده می‌شوند، عبارت اند از: $A_1=\int_a^c f(x)\,dx$ و $A_2=\int_c^b f(x)\,dx$

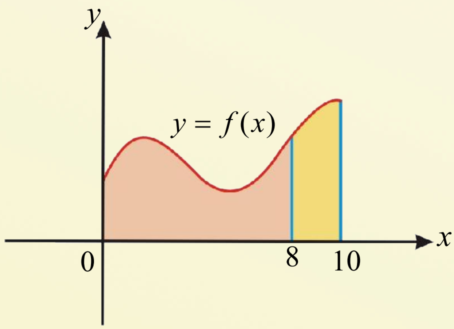
در نتیجه، نظر به بالا گفته می‌توانیم که: $A=A_1+A_2 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$

مثال: اگر انتیگرال $\int_0^{10} f(x)\,dx=17$ و $\int_0^{8} f(x)\,dx=12$ باشد، قیمت $\int_8^{10} f(x)\,dx$ را حساب کنید.

حل:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

$$\int_0^{10} f(x)\,dx=\int_0^{8} f(x)\,dx+\int_8^{10} f(x)\,dx$$



حال قیمت انتیگرال‌ها را وضع و محاسبه می‌کنیم:

$$\int_8^{10} f(x)\,dx=\int_0^{10} f(x)\,dx-\int_0^{8} f(x)\,dx=17-12=5$$

7- اگر توابع $f(x)\le g(x)$ در انتروال $[a,b]$ انتیگرال‌پذیر باشند، در آن صورت داریم که:

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

ثبوت:

$$\int_a^b g(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b [g(x)-f(x)]dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[g(x)-f(x)]\ \Delta x$$

از آنجا که $g(x)-f(x)\ge 0$ و $\Delta x\ge 0$ است، هر یک از حدود سلسلهٔ اخیر غیرمنفی و لیمت آن نیز غیرمنفی می‌باشد؛ یعنی:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[g(x_i)-f(x_i)]\ \Delta x\ge 0\Rightarrow \int_a^b [g(x)-f(x)]dx\ge 0$$

$$\int_a^b g(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx\ge 0\Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx\ge \int_a^b f(x)\,dx$$

مثال: اگر $f(x)=1-\frac{x^2}{4}$ و $g(x)=1+\frac{x^2}{2}$ باشد، برای $x>1$، $\int_a^b f(x)\,dx\le \int_a^b g(x)\,dx$ را دریابید.

حل:

$$\int_a^b (1-\frac{x^2}{4})\,dx\le \int_a^b (1+\frac{x^2}{2})\,dx$$

$$\int_a^b 1\,dx-\int_a^b \frac{x^2}{4}dx\le \int_a^b 1\,dx+\int_a^b \frac{x^2}{2}dx$$

$$[x]_a^b-\frac{1}{12}[x^3]_a^b\le [x]_a^b+\frac{1}{6}[x^3]_a^b$$

می‌دانیم که $(b-a)>0$ است، بنا بر آن:

$$(b-a)-\frac{1}{12}(b^3-a^3)\le (b-a)+\frac{1}{6}(b^3-a^3)\qquad /\div(b-a)$$

$$1-\frac{1}{12}(a^2+ab+b^2)\le 1+\frac{1}{6}(a^2+ab+b^2)$$

$$/\div(a^2+ab+b^2)$$

$$-\frac{1}{12}<\frac{1}{6}$$

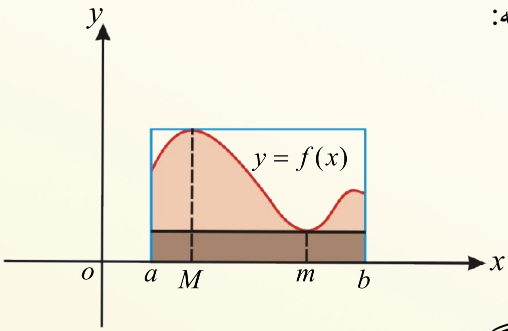
8- اگر تابع $f(x)$ در انتروال $[a,b]$ متمادی و M,m به ترتیب قیمت اصغری مطلق و اعظمی مطلق تابع در این انتروال باشند، در این صورت:

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$$

ثبوت: چون $m\le f(x)\le M$ است، داریم که:

$$\int_a^b m\,dx\le\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b M\,dx$$

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$$



رابطهٔ اخیر، به نام قضیهٔ تخمینی انتیگرال یاد می گردد.

مثال: انتیگرال $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ را به طور تخمینی حساب کنید.

حل: چون تابع $f(x)=e^{-x^2}$ در انتروال $[0,1]$ متمادی است و $M=f(0)=e^0=1$ اعظمی مطلق و $m=f(1)=e^{-1}$ اصغری مطلق دارد، داریم که:

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$$

$$e^{-1}(1-0)\le\int_0^1 e^{-x^2}\,dx\le 1(1-0)$$

$$e^{-1}\le\int_0^1 e^{-x^2}\,dx\le 1$$

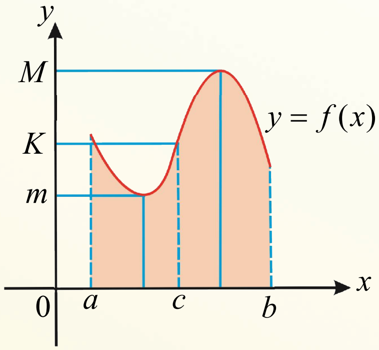
$$e^{-1}=\frac{1}{e}\approx 0.3679\Rightarrow 0.3679\le\int_0^1 e^{-x^2}\,dx\le 1$$

در نتیجه، قیمت انتیگرال مذکور بین عدد 1 و 0.3679 قرار دارد.

9- اگر تابع $f(x)$ در انتروال بستهٔ $[a,b]$ متمادی باشد، در این صورت یک عدد حقیقی c، $a\le c\le b$ وجود دارد که:

$$\int_a^b f(x)\,dx=f(c)(b-a)$$

ثبوت: برای $a<b$ هرگاه m و M قیمت‌های اصغری و اعظمی مطلق تابع در انتروال $[a,b]$ باشند، مانند شکل مقابل بنابر قضیهٔ تخمین انتیگرال برای $c\in[a,b]$ داریم که:



$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)\ \Rightarrow\ m\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\le M$$

فرض می‌کنیم $K=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ است، بنابرین $m\le k\le M$ می‌باشد و برای هرعدد حقیقی c، $a\le c\le b$ داریم که $K=f(c)$ است، پس:

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx\Rightarrow\int_a^b f(x)\,dx=f(c)(b-a)$$

رابطهٔ اخیر، به نام قضیهٔ قیمت متوسط یاد می‌گردد؛ زیرا عدد $f(c)$ عبارت از قیمت متوسط تابع $f(x)$ در انتروال $[a,b]$ است.

مثال: تابع $f(x)=x^2$ را در انتروال $[1,4]$ در نظر بگیرید. آیا می‌توان نشان داد.

حل:

$$\int_1^4 x^2\,dx=[\frac{x^3}{3}]_1^4=[\frac{64}{3}-\frac{1}{3}]=[\frac{64-1}{3}]=\frac{63}{3}=21$$

چون تابع $f(x)=x^2$ است، حال اگر به عوض x قیمت c را در تابع وضع کنیم، $f(c)=c^2$ می‌شود که از اینجا نظر به فورمول قیمت متوسط، قیمت c به‌طور زیر به دست می‌آید:

$$\int_a^b f(x)\,dx=f(c)(b-a)$$

حال در رابطهٔ بالا قیمت وضع می‌کنیم:

$$\int_1^4 x^2\,dx=c^2(4-1)$$

$$21=3c^2\Rightarrow c^2=\frac{21}{3}\Rightarrow c^2=7\Rightarrow c=\sqrt{7}$$

$$k=f(c)\quad,\quad f(c)=c^2=(\sqrt{7})^2=7\Rightarrow f(c)=7\quad,\quad k=7$$

پس واضح شد که یک قیمت تابع مساوی با k می‌شود و $1 < \sqrt{7} < 4$ است.

از آنجا که مساحت مستطیل عبارت از طول ضرب عرض می‌باشد، در فورمول قیمت متوسط $f(c)$ عرض مستطیل و $b-a$ طول مستطیل است. بنابرین مساحت تحت منحنی در انتروال $[1,4]$ مساوی با مساحت مستطیلی است که اضلاع آن 7 و 3 می‌باشد.

تمرین

1- انتیگرال‌های معین زیر را محاسبه کنید.

$$a)\int_{-1}^{1}(x^3+2)\,dx=?$$

$$b)\int_{2}^{5}7x\,dx=?$$

$$c)\int_{-2}^{4}(-x)\,dx=?$$

$$d)\int_{1}^{3}\sqrt{x}\,dx=?$$

$$e)\int_{-2}^{3}3x\,dx=?$$

$$f)\int_{-1}^{2}(x^3-\frac{1}{2}x^4)\,dx=?$$

$$g)\int_{-4}^{4}(2x^2-\frac{1}{8}x^4)\,dx=?$$

2- قیمت انتیگرال $\int_{-1}^{4}f(x)\,dx$ را در انتروال $[-1,4]$ دریابید اگر $\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=5$ و $\int_{1}^{4}f(x)dx=-2$ باشد.

3- تابع $f(x)=x$ را در انتروال $[0,2]$ در نظر گرفته و از آن قیمت c را دریابید.

قضایای اساسی مشتق و انتیگرال

یک موتر با سرعت $72\dfrac{m}{\sec}$ در حال حرکت است. رانندهٔ آن برک را فشار می‌دهد و موتر بعد از 6 ثانیه توقف می‌کند. فاصلهٔ طی شده در این مدت را دریابید؟

$$S(t) = v_0 \cdot t$$

- با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x)=x^2$ را در نقطهٔ $h=0$ به دست آرید.
- انتیگرال مشتق به دست آمده را محاسبه کنید.
- قیمت به دست آمده را با تابع اولی مقایسه کنید.

از فعالیت فوق نتیجهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم:

بین مشتق و انتیگرال یک ارتباط منطقی وجود دارد که با استفاده از این ارتباط می‌توان قضایای اصلی و اساسی مشتق و انتیگرال را به‌طور زیر به اثبات رسانید:

1- قضیهٔ اول اساسی مشتق و انتیگرال:

اگر تابع $f(x)$ در انتروال $[a,b]$ متمادی و x در این انتروال شامل باشد، داریم: $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$

چون تابع $f(x)$ در انتروال $[a,b]$ مشتق‌پذیر است، پس برای هر $x\in[a,b]$, $F'(x)=f(x)$ می‌باشد.

ثبوت: چون تابع $f(x)$ در انتروال $x\in[a,b]$ متمادی است؛ تابع f در انتروال $[a,x]$ نیز متمادی می‌باشد و در نتیجه، تابع $f(x)$ در این انتروال انتیگرال‌پذیر است.

حال مشتق تابع $F(x)$ را طبق تعریف، نوشته و متحول x را به اندازهٔ h تزاید داده، داریم که:

$$F'(x)=f(x)$$

$$F'(x)=\lim_{h\to0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{F(x+h)-F(a)+F(a)-F(x)}{h}$$

$$F'(x)=\lim_{h\to0}\frac{F(x+h)-F(a)-(F(x)-F(a))}{h}=\lim_{h\to0}\frac{F(x)\Big|_a^{x+h}-F(x)\Big|_a^{x}}{h}$$

اکنون $f(x)$ را با $f(t)$ عوض می‌کنیم:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(t)\Big|_a^{x+h}-F(t)\Big|_a^{x}}{h}$$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^{x} f(t)\,dt}{h}$$

نظر به خاصیت سوم داریم که: $\int_a^b f(t)\,dt=-\int_b^a f(t)\,dt$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^{x} f(t)\,dt}{h}$$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{a} f(t)\,dt+\int_a^{x+h} f(t)\,dt}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}$$

اما بنابر قضیه قیمت متوسط $f(c)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$ است که c بین x و $x+h$ قرار دارد؛ پس وقتی که h به طرف صفر تقرب کند، c به x تقرب می‌کند و به دلیل متمادیت تابع $f(x)$ داریم:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt=\lim_{c\to x} f(c)=f(x)$$

در نتیجه: $F'(x)=f(x)$ می‌باشد.

مثال: مشتق $F(x)=\int_2^{x^2+1}\frac{1}{t^2+1}$ را بیابید.

حل:

$$F(x)=\int_a^{x} f(t)\,dt \text{ یا } F(x)=\int_a^{g(x)} f(t)\,dt$$

$$u=g(x)=x^2+1$$

$$f(t)=\frac{1}{t^2+1}$$

نظر به قاعدهٔ زنجیری داریم که:

$$F'(x)=f(g(x))\cdot g'(x)$$

$$F'(x)=\frac{1}{(x^2+1)^2+1}\cdot(x^2+1)'=\frac{1}{(x^2+1)^2+1}\cdot 2x$$

$$F'(x)=\frac{2x}{(x^2+1)^2+1}$$

2- قضیه دوم اساسی مشتق و انتیگرال:

اگر تابع $F(x)$ تابع اولیهٔ $f(x)$ در انتروال بستهٔ $[a,b]$ و متمادی باشد، در این صورت داریم که:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

ثبوت: نظر به قضیهٔ قبلی می‌دانیم که اگر $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ باشد، برای هر $F'(x) = f(x),\ x \in [a,b]$ است، پس خلاف این دو مقدار، مقدار ثابتی وجود دارد که:

$$f(x) - F(x) = k \Rightarrow f(x) = F(x) + k$$

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$$F'(x) = f(x)$$

$$\int_a^x f(t)dt = f(x) = F(x) + k$$

$$\int_a^x f(t)\,dt - F(x) = k$$

اگر به جای x در رابطهٔ فوق a را وضع کنیم:

$$\int_a^a f(t)\,dt - F(a) = k \quad , \qquad 0 - F(a) = k \Rightarrow k = -F(a)$$

قیمت k را در رابطهٔ اولی وضع می کنیم:

$$\int_a^x f(t)\,dt - F(x) = -F(a)$$

اگر به جای x در این رابطه b را وضع کنیم:

$$\int_a^b f(t)\,dt - F(b) = -F(a)$$

که آن‌را به صورت $\int_a^b f(t)\,dt = [F(x)]_a^b$ نیز نمایش می‌دهند.

رابطهٔ اخیر، ارتباط بین تابع اولیهٔ F و انتیگرال معین $\int_a^b f(t)\,dt$ را بیان می‌کند که به نام رابطهٔ نیوتن لایبنیتز معروف است.

یادداشت

$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$

$\int \cos x\,dx = \sin x + c$

$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$

$\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + c$

مثال: حاصل $\int_0^1 x^2 dx$ را به دست آرید.

حل:

$$\int_0^1 x^2 dx = F(1) - F(0) = [\frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{3}\cdot 0^3 = \frac{1}{3}$$

تمرین

1- مشتق‌های زیر را پیدا کنید.

$a)\ F(t) = \int_{\sin t}^{\cos t} \frac{1}{4-x^2}dx$ $\qquad$ $b)\ F(t) = \int_0^{\cos t} \frac{1}{4-x^2}dx$

$c)\ F(t) = \int_{-\pi}^{t} \frac{\cos y}{1+y^2}dy$ $\qquad$ $d)\ F(x) = \int_1^{x} \frac{\sin t}{t}dt$

2- اگر در تابع $f(t)=t$ ، $F(0)=2$ باشد، مقدار $F(b)$ را در نقاط $b=1,\dots,0.4,0.2,0$ پیدا کنید.

3- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$ را پیدا کنید.

انتیگرال‌گیری به طریقهٔ تعویض

– آیا می‌توانید انتیگرال مقابل را با استفاده از خواص انتیگرال‌های غیرمعین حل کنید؟

– اگر پاسخ منفی است، در این صورت افادهٔ تحت جذر را با یک متحول دیگر تعویض و آن‌را حساب کنید و بگویید که این طریقهٔ تعویض کردن در انتیگرال‌ها را به نام چه یاد می‌کنند؟

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\ dx$$

- در انتیگرال $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\ dx$ افادهٔ تحت جذر را مساوی با متحول u قرار دهید.
- از u مشتق گرفته و قیمت dx را دریابید.
- چون انتیگرال فوق یک انتیگرال معین است، پس در معادلهٔ $u = 2x+1$ قیمت های $x = 0$ و $x = 4$ را وضع و حدها را از جنس u دریابید و بعد از آن قیمت انتیگرال را حساب کنید.

از فعالیت فوق به این نتیجه می‌رسیم که:

اگر تابع $f(x)$ در انتروال بستهٔ $[a\ ,\ b]$ مشتق‌پذیر باشد، $u = g(x)$ و $F' = f$ تعویض گردد.

چون $du = g'(x)\ dx$ است، توسط قاعدهٔ زنجیری می‌نویسیم که:

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\ dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

مثال 1: انتیگرال $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$ را حساب کنید.

حل: افادهٔ داخل قوس را با u تعویض می کنیم:

$$u=3-5x \quad , \qquad du=-5\,dx \qquad\qquad dx=-\frac{du}{5}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ u=3-5x \;\Rightarrow\; u=3-5\cdot 1=-2 \;\Rightarrow\; u=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ u=3-5x \;\Rightarrow\; u=3-5\cdot 2=3-10 \;\Rightarrow\; u=-7 \end{cases}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}=\int_{-2}^{-7}\frac{1}{u^2}(-\frac{1}{5})\,du=-\frac{1}{5}\int_{-2}^{-7}\frac{du}{u^2}=-\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{u}\right]_{-2}^{-7}=\left[\frac{1}{5u}\right]_{-2}^{-7}=\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{14}$$

مثال 2: انتیگرال $\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5\,dx$ را محاسبه کنید.

حل: افاده داخل قوس را به u تعویض می کنیم:

$$u=1+2x^3 \quad , \qquad du=6x^2\,dx \Rightarrow x^2dx=\frac{1}{6}du$$

$$\begin{cases} x=0 \\ u=1+2x^3 \Rightarrow u=1+2\cdot 0=1 \Rightarrow u=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ u=1+2x^3 \Rightarrow u=1+2\cdot 1=3 \Rightarrow u=3 \end{cases}$$

$$\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5\,dx=\int_1^3 u^5\,\frac{1}{6}\cdot du=\frac{1}{6}\int_1^3 u^5du=\frac{1}{6}[\frac{u^6}{6}]_1^3=\frac{1}{6}[\frac{3^6}{6}-\frac{1}{6}]$$

$$=\frac{1}{6}[\frac{729}{6}-\frac{1}{6}]=\frac{1}{6}[\frac{728}{6}]$$

$$=\frac{728}{36}=\frac{182}{9}=20.\bar{2}$$

- افاده تحت جذر انتیگرال $\int x^2\sqrt{x^3+1}\;dx$ را با متحول u تعویض کنید.
- از uمشتق گرفته، قیمت دریافت شده را در انتیگرال اولی گذاشته و آنرا حساب کنید.
- از $F(x)+C$ تابع به دست آمدهٔ فوق مشتق گرفته و تابع اولی را به دست آورید.

از فعالیت فوق نتیجهٔ زیر به دست می‌آید:

اگر تابع $F(u)$ تابع اولی $f(u)$ باشد، با تعویض متحول $u=g(x)$ به یک تابع از متحول مستقل x که مشتق متمادی دارد؛ با استفاده از قاعدهٔ زنجیری خواهیم داشت:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx=\int f(u)\,du$$

مثال 1: انتیگرال $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$ را حساب کنید.

حل: ابتدا افادهٔ تحت جذر را با u عوض می‌کنیم:

$$u=1-4x^2\ ,\ du=-8x\,dx$$

$$xdx=-\frac{1}{8}du$$

$$\int\frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx=\int\frac{1}{\sqrt{u}}(-\frac{1}{8})\,du=-\frac{1}{8}\int\frac{1}{\sqrt{u}}du=-\frac{1}{8}\int u^{-\frac{1}{2}}du=-\frac{1}{8}\left(\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right)+C$$

$$=-\frac{1}{8}\left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right)+C=-\frac{1}{8}\left(\frac{\sqrt{u}}{\frac{1}{2}}\right)+C=-\frac{1}{8}(2\sqrt{u})+C=-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}+C$$

مثال 2: $\int x^3\cos(x^4+2)\ dx$ را محاسبه کنید.

حل: اگر $u=x^4+2$ را وضع کنیم، این نتیجه به دست می‌آید:

$$u=x^4+2\ ,\ du=4x^3dx\ ,\ x^3dx=\frac{1}{4}du$$

$$\int x^3\cos(x^4+2)\ dx=\int\cos u\cdot\frac{1}{4}du$$

$$=\frac{1}{4}\int\cos u\,du$$

$$=\frac{1}{4}\sin u+C$$

$$=\frac{1}{4}\sin(x^4+2)+C$$

تمرین

انتیگرال‌های زیر را با روش تعویضی محاسبه کنید:

$a)\ \int \cos 3x\, dx = ?$

$b)\ \int_{1}^{2} x\sqrt{x-1}\ dx = ?$

$c)\ \int_{0}^{7} \sqrt{4+3x}\ dx = ?$

$d)\ \int 2\sqrt[5]{(1-4x)^2}\, dx = ?$

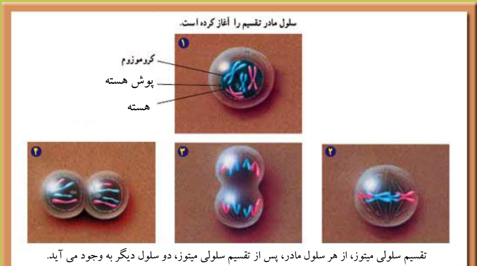
$e)\ \int 2x(x^2+3)^4\, dx = ?$

$f)\ \int_{0}^{5} \frac{x\, dx}{x^2+10} = ?$

$g)\ \int \sqrt{\cos x}\ \sin x\ dx = ?$

انتیگرال گیری به طریقهٔ قسمی (Integration by Parts)

- در وقت تقسیمات حجروی، یک حجره بـه دو یا چندین حجرهٔ دیگر تقسیم می‌شود. آیا می‌توان این روش را در دیگر اشیاء مثـل سـنگ، ریـگ و غیره مشاهده کرد؟
- اگر پاسخ مثبت است این روش را به نام چه یاد می کنند؟



تقسیم سلولی میتوز، از هر سلول مادر، پس از تقسیم سلولی میتوز، دو سلول دیگر به وجود می آید.

فعالیت

- انتیگرال $\int \frac{x\ dx}{x^2+1}$ را با روش تعویضی حل کنید.
- انتیگرال $\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}\ dx$ را با روش تعویضی بیابید.
- آیا می‌توان $\int x^2 \sin x\, dx$ را با روش تعویضی حل کرد؟

از فعالیت فوق به این نتیجه می‌رسیم که:

در انتیگرال $\int f(x)g(x)\,dx$ ، $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع مشتق‌پذیر اند؛ ولی محاسبهٔ انتیگـرال آنها کـار سـاده‌یـی نیـست. اگـر $f(x)=u$ و $g(x)=v$ را قـرار دهـیم، حاصـل ضـرب مـشتق آنهـا مساوی است با: $(u\cdot v)'=u'\cdot v+v'\cdot u$

از رابطهٔ فوق $v'u$ را به دست آورده و اطراف را انتیگرال می گیریم:

$$v'\cdot u=(u\cdot v)'-u'\cdot v$$

$$\int v'\cdot u\ dx=u\cdot v-\int u'\cdot v\ dx \quad \text{یا} \quad \int udv=u\cdot v-\int vdu$$

رابطهٔ اخیر را «فارمول انتیگرال غیرمعین به روش قسمی» می گویند.

اگر توابع u و v در بین انتروال $[a,b]$ تعریف شده باشند فارمول زیر به نام «فـارمول انتیگـرال معین به روش قسمی» یاد می گردد.

$$\int_a^b v'u\,dx=u\cdot v\,\Big|_a^b-\int_a^b vu'\,dx \quad \text{یا} \quad \int_a^b udv=u\cdot v\,\Big|_a^b-\int_a^b vdu$$

مثال 1: انتیگرال $\int x\sin x\,dx$ را پیدا کنید.

حل:

$$u = x \qquad , \qquad du = dx$$
$$dv = \sin x\,dx \quad , \quad v = -\cos x$$
$$\int udv = u \cdot v - \int vdu$$
$$\int x\sin x\,dx = x(-\cos x) - \int -\cos x\,dx$$
$$= -x\cos x + \sin x + C$$

مثال 2: انتیگرال $\int_0^1 -xe^x\,dx$ را حساب کنید.

حل:

$$u = -x \qquad , \qquad du = -dx \qquad , \qquad -du = dx$$
$$dv = e^x dx \quad , \quad v = e^x$$
$$\int_a^b v' \cdot u\,dx = u \cdot v \,\Big|_a^b - \int_a^b v \cdot u'\,dx$$
$$\int_0^1 -xe^x\,dx = [-xe^x]_0^1 + \int_0^1 e^x dx$$
$$= -e^1 + 0 \cdot e^0 + [e^x]_0^1$$
$$= -e^1 + e^1 - e^0 \quad = -e^0$$
$$= -1$$

یادداشت

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

تمرین

انتیگرال‌های زیر را حساب کنید:

a) $\int \theta\cos\theta\,d\theta = ?$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx = ?$

c) $\int x^5\cos(x^3)\,dx = ?$

d) $\int_0^1 x\,e^x\,dx = ?$

مجموع ریمان: فرض کنیم تابع $y=f(x)$ در انتروال بستهٔ $[a,b]$ متمادی تعریف شده است، اگر بخواهیم مساحت ناحیهٔ A واقع بین محور x و منحنی تابع $y=f(x)$ را که قابل تبدیل به اشکال هندسی نیست محاسبه کنیم:

انتروال بستهٔ $[a,b]$ را به n مستطیل‌ها تقسیم می‌کنیم، طوری که عرض مستطیل‌ها از رابطهٔ $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$ به دست می‌آید و طول این مستطیل‌ها عبارت از قیمت تابع در همان نقطه است.

طول هر انتروال این مستطیل‌ها برای $i=1,2,..,n$ قرار زیر است:

$$x_0=a \quad , \quad x_1=a+\Delta x \quad , \quad x_2=a+2\Delta x, \; \dots \; , x_i=a+i\Delta x, \; \dots \; , x_n=b$$
$$[x_0,x_1]\;,\;[x_1,x_2]\;,\;[x_2,x_3],\;\dots\;,[x_{i-1},x_i],\;\dots\;,[x_{n-1},x_n]$$

اگر مساحت‌های مستطیل‌های تحتانی را به $f(x_{i-1})\Delta x$ و مساحت‌های مستطیل‌های فوقانی را به $f(x_i)\Delta x$ و مساحت محصور شده را به A نشان دهیم داریم: $\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x < A < \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

انتیگرال غیرمعین: هرگاه تابع $f(x)$ در انتروال بستهٔ $[a,b]$ تعریف و $F(x)$ یک تابع اولیه از $f(x)$ باشد، ست توابع $F(x)+C$ را در حالی که C یک عدد ثابت اختیاری است، به نام انتیگرال غیر معین از $f(x)$ یاد می‌کند و می‌نویسند: $\int f(x)dx=F(x)+C$

خواص انتیگرال غیرمعین:

$$\int k dx=k\int dx=kx+C$$
$$\int a\, f(x)\,dx=a\int f(x)\,dx$$
$$\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx$$
$$\int[f_1(x)+f_2(x)+\dots+f_n(x)]dx=\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx+\dots+\int f_n(x)dx$$
$$\int[f(x)\cdot g(x)]\,dx\neq\int f(x)\,dx\cdot\int g(x)\,dx$$
$$\int\frac{f(x)}{g(x)}dx\neq\frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx} \quad , \; g(x)\neq 0$$

انتیگرال معین: لیمت مجموع ریمان تابع $f(x)$ در انتروال بستهٔ $[a,b]$ وقتی که عدد n به بی‌نهایت تقرب کند و بزرگ‌ترین طول انتروال‌های فرعی (Δx) به صفر نزدیک گردد، به نام انتیگرال معین تابع $f(x)$ از $x=a$ تا $x=b$ یاد می‌شود؛ یعنی:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$$

که در اینجا a را سرحد پایینی و b را سرحد بالایی انتیگرال گویند.

خواص انتیگرال معین:

$$\int_a^b C\,dx = C(b-a)$$

$$\int_a^b k\,f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$f(x)\le g(x) \;\Rightarrow\; \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

$$m(b-a)\le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a) \;\Rightarrow\; f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

1- **قضیهٔ اول اساسی مشتق و انتیگرال:** اگر تابع f در انتروال $[a,b]$ متمادی و x در این انتروال شامل باشد، داریم:

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

چون تابع f در انتروال $[a,b]$ مشتق پذیر است پس برای هر $x\in[a,b]$, $F'(x)=f(x)$ می‌باشد.

2- **قضیه دوم اساسی مشتق و انتیگرال:** اگر تابع $F(t)$ تابع اولیه $f(t)$ در انتروال $[a,b]$ متمادی باشد، در این صورت داریم که:

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

- اگر تابع $F(u)$ تابع اولی $f(u)$ باشد، با تعویض متحول $u=g(x)$ به یک تابع از متحول مستقل x که مشتق متمادی دارد؛ با استفاده از قاعدهٔ زنجیری خواهیم داشت:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx=\int f(u)\,du$$

- اگر تابع $f(x)$ در انتروال $[a\ ,\ b]$ مشتق‌پذیر باشد، $u=g(x)$ و $F'=f$ تعویض می گردد. چون $du=g'(x)\ dx$ است، توسط قاعدهٔ زنجیری می‌نویسیم که:

$$\int_a^b f(g(x))\ g'(x)\ dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

- در انتیگرال $\int f(x)g(x)\ dx$ ، $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع مشتق‌پذیر اند؛ ولی محاسبهٔ انتیگرال آنها کار ساده‌یی نیست اگر $f(x)=u$ و $g(x)=v$ را قرار دهیم، حاصل ضرب مشتق آنها مساوی است با:

$$(u\cdot v)'=u'\cdot v+v'\cdot u$$

از رابطه فوق $v'\cdot u$ را به دست آورده و اطراف را انتیگرال می گیریم:

$$\int v'\cdot u\ dx=u\cdot v-\int u'\cdot v\ dx \quad \text{یا} \quad \int udv=u\cdot v-\int vdu$$

رابطه اخیر را به نام فارمول انتیگرال غیر معین به روش قسمی یاد می‌کنند.

- اگر توابع u و v در انتروال $[a,b]$ تعریف شده باشند، فارمول زیر به نام «فارمول انتیگرال معین به روش قسمی» یاد می‌گردد:

$$\int_a^b v'u\,dx = u\cdot v\,\Big|_a^b - \int_a^b vu'\,dx \quad \text{یا} \quad \int_a^b u\,dv = u\cdot v\,\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

تمرینات عمومی فصل چهارم

1- حاصل انتیگرال‌های معین زیر را به دست آورید:

$a)\ \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+x^2}dx$ $\qquad b)\ \int_{-4}^{4}[2x^2 - \frac{1}{8}x^4]dx$ $\qquad c)\ \int_{2}^{4} \frac{1}{x^2}dx$

$d)\ \int_{0}^{3} 4dx$ $\qquad e)\ \int_{1}^{3} \sqrt{x}\, dx$ $\qquad f)\ \int_{1}^{2} (x^2 - x^5)dx$

$g)\ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^2 x}dx$ $\qquad h)\ \int_{-2}^{0}[\frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{3}]dx$ $\qquad i)\ \int_{2}^{3} (x^3 + x^2)dx$

$j)\ \int_{-2}^{2}[x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - 4]dx$ $\qquad k)\ \int_{0}^{\pi} \sin x dx$ $\qquad l)\ \int_{1}^{2} x^2\, dx$

2- قیمت انتیگرال‌های غیرمعین زیر را محاسبه کنید:

$a)\ \int [\sin x + 8x^3]dx$ $\qquad g)\ \int \sqrt[5]{x^3}\, dx$

$b)\ \int [x^5 + \frac{4}{x^4} + x^3 + \frac{2}{x^2} + x]dx$ $\qquad h)\ \int \frac{3x^2 + 8x}{x}dx$

$c)\ \int x(1-2x^2)\, dx$ $\qquad i)\ \int (2x^2 + 3)dx$

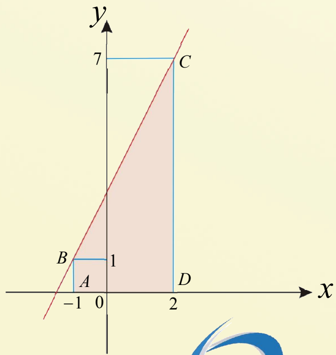
$d)\ \int \sin x\, dx$ $\qquad j)\ \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}}dx$

$e)\ \int \frac{\sin 2x}{2\sin x}dx$ $\qquad k)\ \int \frac{(1+x)(1-x)}{x-x^3}dx$

$f)\ \int \frac{(1-x)^2}{1-x}dx$ $\qquad l)\ \int (3x^2 + 4x - 1)\, dx$

3- مساحت محصور شدهٔ انتیگرال زیر را با استفاده از شکل حساب کنید:

$$\int_{-1}^{2} (2x+3)\, dx$$



4- انتیگرال‌های زیر را با استفاده از روش تعویضی دریابید:

$a)\ \int 3\cos(2x+1)\,dx$

$b)\ \int \sqrt{3x+5}\,dx$

$c)\ \int \frac{2\,dx}{x+2}$

$d)\int (3x+6)^3\,dx$

$e)\int x^3\sqrt{x^4+2}\,dx$

$f)\int (x^3+2)^2 3x^2 dx$

$g)\int_0^2 \frac{dt}{(3-2t)^2}$

$h)\int_0^2 x^2\sqrt{9-x^3}\,dx$

$i)\int \frac{1}{(x-10)^7}dx$

$j)\int_0^1 (1-x^2)^3 x dx$

$k)\int (4-3x)^7 dx$

$l)\int \frac{x^2dx}{\sqrt[4]{x^3+2}}$

5- انتیگرال‌های زیر را با استفاده از روش قسمی حل کنید:

$a)\ \int x\cos x\,dx$

$b)\int_0^{\pi} \sin x\cos x\,dx$

$c)\ \int e^x\cdot\cos x\,dx$

$d)\int_0^{2\pi} x\cos 3x\,dx$

$e)\ \int xe^{-x}dx$

$f)\int x\sqrt{1+x}\,dx$

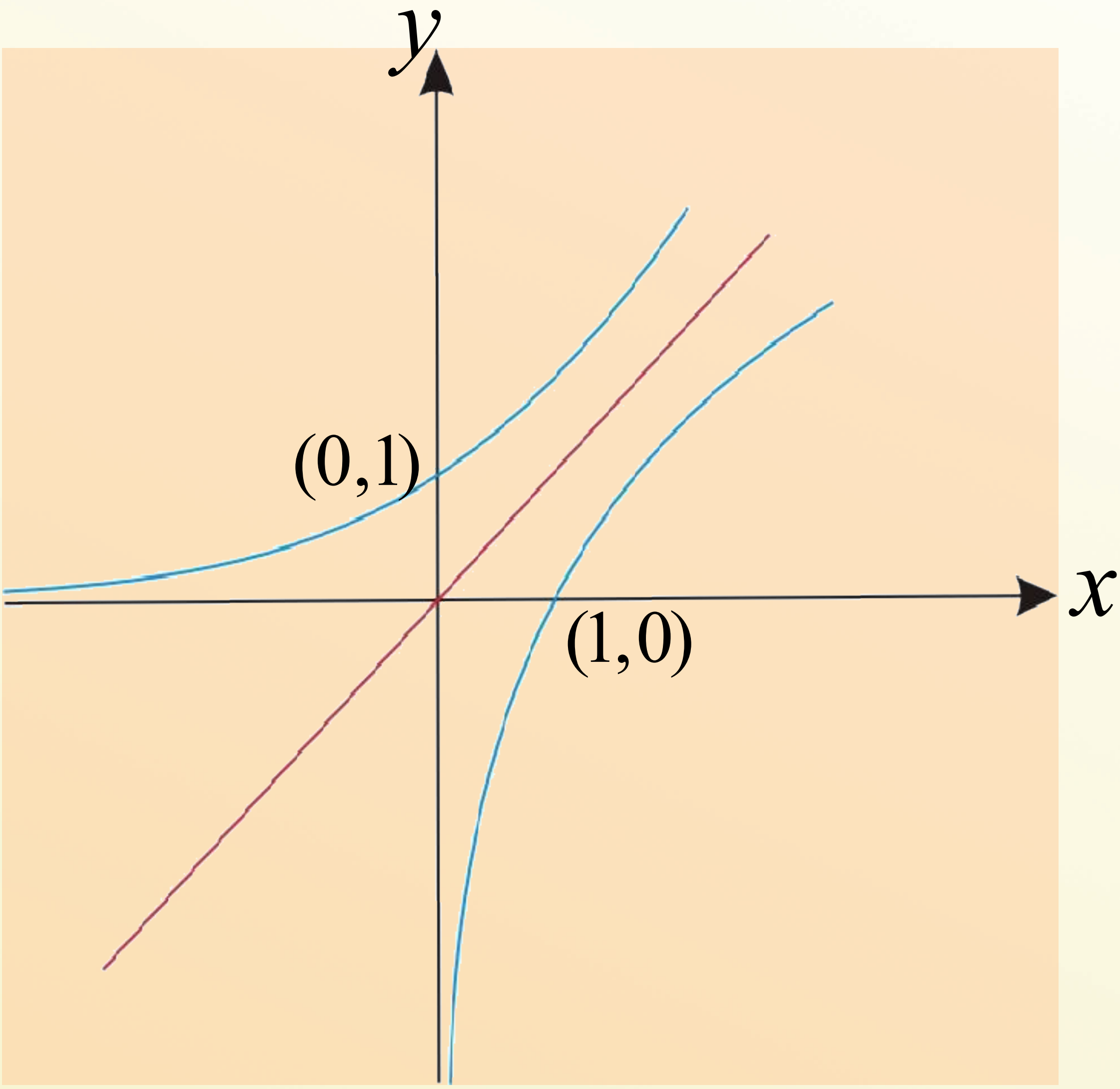
$g)\ \int x^2\cdot e^{2x}dx$

$h)\ \int e^{2x}\sin 3x\,dx$

$i)\ \int x^2\cdot e^{-x}\,dx$

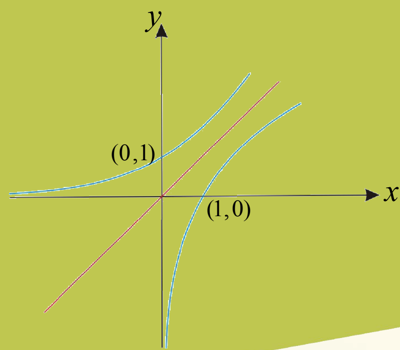
فصل پنجم

مشتق و انتیگرال توابع لوگاریتمی و اکسپوننشیل


y
x
(0,1)
(1,0)

مشتق توابع اکسپوننشیل و لوگاریتمی

شکل مقابل، گراف کدام نوع از توابع را نشان می‌دهد؟



فعالیت

- لوگاریتم را تعریف کنید و خواص آن‌را بنویسید؟
- توابع لوگاریتمی و اکسپوننشیل (نمایی) با هم چه رابطه‌یی دارند؟
- هرگاه $\log_b x$ یک تابع متصل باشد $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ مساوی با کدام عدد است؟
- لوگاریتم طبیعی را از هر دو طرف تابع $y=f(x)$ اخذ کرده و رابطهٔ آن‌را بنویسید؟

نتیجهٔ فعالیت فوق را به طور زیر بیان می‌نماییم:

بصورت عموم، اگر $f(x)=\ln x$ و $g(x)=a^x$ باشد؛ پس $g'(x)=a^x\ln a$ و $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ است.

ثبوت:

1-

$$y=g(x)=a^x$$

$$\ln y\ \ Lna^x=x\ln a$$

از دو طرف مساوات، نظر به x مشتق می گیریم:

$$\frac{y'}{y}=x'\ln a+x(\ln a)'$$

$$\frac{y'}{y}=\ln a+0$$

$$\frac{1}{y}y'=\ln a$$

$$y'=y\ln a \quad\Rightarrow\quad g'(x)=a^x\ln a$$

-2

$$f(x)=\ln x$$

$$(\ln x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\frac{x+h}{x}}{h}$$

$$(\ln x)'=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln(\frac{x+h}{x})=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln(1+\frac{h}{x})\;=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{x}{h}\ln(1+\frac{h}{x})$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\ln(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

اگر $u=\frac{x}{h}$ وضع گردد، $\frac{h}{x}=\frac{1}{u}$ می‌شود. از آنجا که $h\to 0$ تقرب می کند، $u\to\infty$ نزدیک می گردد. پس می‌توانیم بنویسیم که:

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}\lim_{u\to\infty}\ln(1+\frac{1}{u})^{u}\;=\frac{1}{x}\ln\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{u}$$

می‌دانیم که $\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{u}=e$ است؛ پس: $(\ln x)'=\frac{1}{x}\ln e=\frac{1}{x}$ می‌شود.

قضیه

1- اگر تابع $f(x)=\log_a x$ مشتق‌پذیر باشد؛ پس مشتق آن عبارت از $f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e$ است.

2- اگر $f(x)=\log_a g(x)$ و $g(x)$ مشتق‌پذیر باشد؛ پس: $(\log_a g(x))'=\frac{g'(x)}{g(x)}\log_a e$ است.

ثبوت:

-1

$$f(x)=\log_a x\;\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e$$

$$f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\frac{x+h}{x}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a(1+\frac{h}{x})=\lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\log_a(1+\frac{h}{x})=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log_a(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a\lim_{u\to\infty}(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

حالا اگر $\frac{x}{h}=u$ وضع گردد، پس $\frac{h}{x}=\frac{1}{u}$ می‌گردد که اگر $h\to 0$ پس $u\to\infty$ می کند؛ یعنی:

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a\lim_{h\to 0}(1+\frac{1}{u})^{u}\;=\frac{1}{x}\log_a e$$

2 – می‌خواهیم ثبوت نماییم که:

$$(\log_a g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)} \log_a e$$

نظر به قاعدهٔ زنجیری داریم که:

$$f'(x) = (\log_a g(x))' = (\log_a g(x))' \cdot g'(x) = \frac{1}{g(x)} \log_a e \cdot g'(x)$$

$$= \frac{g'(x)}{g(x)} \log_a e$$

اگر $a = e$ وضع شود، داریم که:

$$(\log_a g(x))' = (\ln g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

نتیجه

1- مشتق توابع *Exponential* را با استفاده از لوگاریتم به آسانی به دست آورده می‌توانیم:

اگر $y = e^x$ باشد، مشتق این تابع $y' = e^x$ است؛ زیرا اگر از هر دو طرف رابطه $y = e^x$ لوگاریتم طبیعی بگیریم، به دست می‌آید که:

$$y = e^x \quad \Rightarrow \ln y = x \ln e = x$$

$$(\ln y)' = (x)' \quad \Rightarrow \frac{y'}{y} = 1 \quad \Rightarrow y' = y \cdot 1 = e^x$$

2- اگر $y = e^u$ باشد و u تابع x باشد، پس داریم که: $y' = u' e^x$

3- اگر $y = a^u$ و $a \neq 1$ باشد، پس داریم که: $y' = u' a^u \ln a$

4- برای پیدا کردن مشتق توابع لوگاریتمی به قاعده‌های مختلف، می‌توانیم از رابطهٔ زیر استفاده نماییم:

$$y = \log_a u \Rightarrow y' = (\log_a u)' = \frac{u'}{u} \log_a e$$

$$y' = \frac{u'}{u} \log_a e = \frac{u'}{u} \cdot \frac{1}{\log_e a} \quad \Rightarrow y' = \frac{(\ln u)'}{\ln a} = \frac{u'}{u \ln a}$$

مثال 1: مشتق تابع $f(x) = \ln(x^2+1)$ را دریابید.

حل: اگر $g(x) = x^2+1$ وضع گردد، داریم که:

$$g(x) = x^2 + 1$$

$$g'(x) = 2x$$

$$(\ln g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$(\ln(x^2+1))' = \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x \quad \Rightarrow f'(x) = (\ln(x^2+1))' = \frac{2x}{x^2+1}$$

مثال 2: مشتق تابع $f(x)=\ln(x^2-5x+4)$ را دریابید.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\ln(x^2-5x+4) \\ g(x)=x^2-5x+4 \Rightarrow g'(x)=2x-5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (\ln g(x))'=\dfrac{g'(x)}{g(x)} \\ (\ln(x^2-5x+4))'=\dfrac{g'(x)}{g(x)}=\dfrac{2x-5}{x^2-5x+4} \end{array}$$

مثال 3: مشتق توابع $f(x)=\log_a\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$ و $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$ را دریابید.

حل: می‌دانیم که $\log_a\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}=\log_a(\dfrac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}$ است، پس می توانیم بنویسیم که:

$$\log_a\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}=\log_a(\frac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_a\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{1}{2}(\log_a(x^2+1)-\log_a(x^2-1))$$

$$(\log_a\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}})'=\frac{1}{2}(\log_a(x^2+1)-\log_a(x^2-1))'$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)}\log_a e-\frac{(x^2-1)'}{(x^2-1)}\log_a e]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2x}{x^2+1}\log_a e-\frac{2x}{x^2-1}\log_a e\right]=\frac{1}{2}\cdot 2x\log_a e\left[\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2-1}\right]$$

$$=\frac{-2x}{x^4-1}\log_a e$$

حل: می‌دانیم که $\ln\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}=\ln(\dfrac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}$ است، پس می توانیم بنویسیم که:

$$\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}=\ln(\frac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1))$$

$$(\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}})'=\frac{1}{2}[\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1)]'=\frac{1}{2}[(\ln(x^2+1))'-(\ln(x^2-1))']$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2x}{x^2-1})=\frac{-2x}{x^4-1}$$

مثال 4– مشتق تابع $y=e^{(x^2+1)}$ را دریافت کنید.

حل: می‌دانیم که اگر $y=e^u$ باشد پس : $y'=u'e^u$ است.

$$y=e^{(x^2+1)} \quad \Rightarrow \quad y'=(x^2+1)'\cdot e^{x^2+1}=2x\cdot e^{x^2+1}$$

مثال 5– مشتق تابع $y=\sqrt[x]{2}$ را به دست آورید:

حل: می‌دانیم که اگر $y=a^u$ باشد، $y'=u'a^u\ln a$ و $u=\dfrac{1}{x}$ است، بنابرین:

$$y=\sqrt[x]{2}=(2)^{\frac{1}{x}} \quad \Rightarrow \quad y'=(\frac{1}{x})'\cdot 2^{\frac{1}{x}}\ln 2=\frac{-1}{x^2}\cdot 2^{\frac{1}{x}}\cdot \ln 2$$

مثال 6: مشتق تابع $y=x^{2x}$ را دریابید.

حل: اگر از اطراف معادله لوگاریتم طبیعی بگیریم، داریم که:

$$y=x^{2x}$$
$$\ln y=\ln x^{2x}$$
$$\ln y=2x\ln x$$
$$(\ln y)'=(2x\ln x)' \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y}=2\ln x+2x\cdot\frac{1}{x}$$
$$y'=2(\ln x+1)\cdot y \quad \Rightarrow \quad y'=2(\ln x+1)\cdot x^{2x}$$

مثال 7: مشتق تابع $y=10^x$ را دریابید.

حل: می‌دانیم $y=a^x \quad \Rightarrow \quad y'=a^x\ln a$ است؛ پس:

$$y=10^x$$
$$y'=10^x\cdot\ln 10$$

مثال 8: مشتق تابع $y=e^{3x}$ را دریابید.

حل: اگر $u=3x$ وضع گردد، داریم که: $u'=3$

$$y=e^u$$
$$y'=e^u\cdot u'=e^{3x}\cdot 3$$
$$y'=3e^{3x}$$

مثال 9: مشتق توابع زیر را به‌دست آورید.

1) $y=\log(x^4+1)$ 2) $y=\log_3(\log_2 x)$ 3) $y=\log_{x^2-1}x^2+1$

حل: می‌دانیم که مشتق توابع لوگاریتمی به قاعده‌های مختلف با استفاده از قضیهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y=\log_a u$$

$$y'=(\log_a u)'=\frac{u'}{u}\log_a e=\frac{u'}{u\log_e a}=\frac{u'}{u\ln a}$$

1) $y=\log(x^4+1) \Rightarrow y'=\dfrac{4x^3}{(x^4+1)\ln 10}$

2) $y=\log_3(\log_2 x) \Rightarrow y'=\dfrac{(\log_2 x)'}{\ln 3\log_2 x}=\dfrac{\frac{1}{x\ln 2}}{\ln 3\log_2 x}=\dfrac{1}{(\ln 2)(\ln 3)x\log_2 x}$

$$=\frac{1}{\ln 2\cdot\ln 3\cdot x\cdot\frac{\log_e x}{\log_e 2}}=\frac{1}{\ln 2\cdot\ln 3\cdot x\cdot\frac{\ln x}{\ln 2}}=\frac{1}{\ln 3x\ln x}$$

3) $y=\log_{x^2-1}x^2+1=\dfrac{\log_e(x^2+1)}{\log_e(x^2-1)}=\dfrac{\ln(x^2+1)}{\ln(x^2-1)}$

میدانیم که $y'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2} \Leftarrow y=\dfrac{u}{v}$ است؛ پس داریم که:

$$y'=\frac{\frac{2x}{x^2+1}\cdot\ln(x^2-1)-\frac{2x}{x^2-1}\ln(x^2+1)}{\left[\ln(x^2-1)\right]^2}$$

تمرین

مشتق توابع زیر را دریابید.

a) $f(x)=\ln\sin 3x$

b) $f(x)=\ln\sqrt{3x^2+7}$

c) $f(x)=\ln(5x^2-6x+5)$

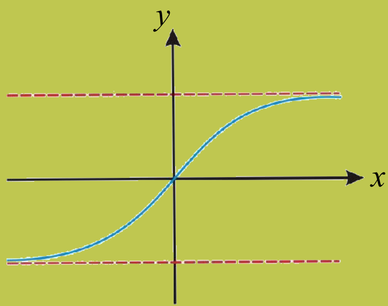
d) $f(x)=\log_{10}3x^2$

e) $f(x)=y=x^x$

f) $y=\dfrac{(x+1)^2(\sqrt{x}-1)}{(x+4)^3e^x}$

مشتق توابع معکوس

شکل مقابل چه نوع تابعی را نشان می‌دهد؟



هرگاه f و g دو تابع معکوس همدیگر باشند؛ یعنی $y=f(x)\Leftrightarrow x=g(y)$ درین صورت $\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=\dfrac{dy}{dx}$ یا $y'_x=\dfrac{1}{x'_y}$ است که از تابع تابع و خواص مشتق توابع ضمنی می‌توانیم بنویسیم:

$$\left.\begin{array}{l} y=f(x) \\ x=g(y) \end{array}\right\} \Rightarrow y'_x\cdot x'_y=y'_y \quad \Rightarrow y'_x\cdot x'_y=1 \quad \Rightarrow y'_x=\frac{1}{x'_y}$$

مثال: مشتق تابع $y=a^x$ را با استفاده از مشتق تابع معکوس آن به‌دست آورید.

حل:

$$y=a^x \quad \Rightarrow x=\log_a y$$

$$\Rightarrow y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{(\log_a y)'}=\frac{1}{\frac{1}{y}\log_a e}=\frac{1}{\frac{1}{y}}\log_e a=y\log_e a$$

$$y'=a^x\ln a$$

مشتق توابع معکوس مثلثاتی

مشتق توابع معکوس مثلثاتی را با استفاده از رابطه‌های زیر به‌دست می‌آوریم:

$$1)\ (\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad 2)\ (\arccos x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$3)\ (\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2} \qquad 4)\ (arc\cot x)'=\frac{-1}{1+x^2}$$

ثبوت:

1) $y = arc\sin x \quad \Leftrightarrow \quad x = \sin y$

$(arc\sin x)' = ?$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

$$\Rightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2) $y = arc\cos x \quad \Leftrightarrow \quad x = \cos y$

$(arc\cos x)' = ?$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}$$

$$\Rightarrow (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3) $y = arc\tan x \Leftrightarrow x = \tan y$

$$\Rightarrow (arc\tan x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y$$

$$= \frac{\cos^2 y}{1} = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y}$$

صورت و مخرج را تقسیم $\cos^2 y$ می کنیم:

$$(arc\tan x)' = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{1}{\tan^2 y + 1} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

4) $y = arc\cot x \Leftrightarrow x = \cot y$

$$(arc\cot x)' = ?$$

$$(arc\cot x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cot y)'} = \frac{1}{\frac{-1}{\sin^2 y}}$$

$$= -\sin^2 y = \frac{-\sin^2 y}{1} = \frac{-\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y}$$

صورت و مخرج را تقسیم $\sin^2 y$ می کنیم:

$$= -\frac{\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{-1}{1+\cot^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}$$

مثال 1: مشتق تابع $y = (\arctan x)^5$ را به دست آورید.

حل:

$$y' = 5(\arctan x)^4 (\arctan x)' = 5(\arctan x)^4 \frac{1}{1+x^2}$$

مثال 2: مشتق تابع $y = \log_5(arc\tan x)$ را به دست آورید.

حل: اگر $arc\tan x = u$ وضع گردد داریم که:

$$y' = [\log_5(\arctan x)]' = (\log_5 u)' = \frac{u'}{u \log_5 e}$$

$$= \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\arctan x \log_5 e} = \frac{1}{(1+x^2)(\arctan x \ln 5)}$$

مثال 3: قیمت مشتق تابع $y = \arctan e^x$ را درنقطهٔ $x = 0$ پیدا کنید.

حل: اگر $e^x = u$ باشد، پس $u' = e^x$ است:

$$y' = [arc\tan e^x]' = (arc\tan u)' = \frac{u'}{1+u^2} = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$$

$$y'(0) = \frac{e^0}{1+e^0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

تمرین

مشتق توابع زیر را دریابید.

1) $y=(arc\sin x)^3$

2) $y=\log_2(arc\cos x)$

کسور قسمی

تجزیهٔ یک کسر به کسور قسمی:

می‌دانیم که حاصل جمع کسرهای $\frac{2}{x+1}$ و $\frac{1}{x^2-1}$ مساوی با $\frac{2x-1}{x^2-1}$ است. آیا می‌توانید از این کسر دوباره کسرهای $\frac{2}{x+1}$ و $\frac{1}{x^2-1}$ را به‌دست آورید؟

$$\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x^2-1}=\frac{2x-1}{x^2-1}$$

فعالیت

- کسرهای $\frac{7}{x+1}$, $\frac{5}{x-2}$ و $\frac{2}{x-5}$ را با هم جمع نمایید.
- حاصل جمع کسرهای فوق را دوباره به کسرهای اولیه تجزیه کنید.
- کسرهای واقعی چه نوع کسرهایی اند، آن را تعریف نمایید.

نتیجهٔ فعالیت فوق را چنین بیان می کنیم:

تعریف: کسرهای کوچک یک کسر واقعی که به شکل حاصل جمع نوشته شده باشد، طوری‌که اگر آنها با هم جمع گردند، کسر داده شدهٔ واقعی به‌دست آید، کسور قسمی نامیده می‌شود.

برای تجزیهٔ یک کسر واقعی، حالت‌های زیر را در نظر می گیریم:

حالت اول:

هرگاه در $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ پولینوم مخرج $P_n(x)$ از عوامل ضربی‌یی که تکرار نشده، تشکیل گردیده باشد، می‌توان آن را همانند الگوی مقابل تجزیه کرد:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}+\frac{C}{x-x_3}+\cdots+\frac{N}{x-x_n}$$

(A, B, C .... اعداد حقیقی اند)

مثال 1: کسر $\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$ را به کسور قسمی آن تجزیه نمایید.

حل: پولینوم مخرج را به عوامل ضربی اولیهٔ آن تجزیه نموده، داریم:

$$x^3-4x^2-7x+10=(x-5)(x-1)(x+2)$$

به مشاهده می‌رسد که کسر فوق‌الذکر از سه کسر تشکیل گردیده است اگر صورت‌های آن‌را A, B, C انتخاب نماییم، داریم که:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$
$$=\frac{A(x-1)(x+2)+B(x-5)(x+2)+C(x-1)(x-5)}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$
$$=\frac{Ax^2+Ax-2A+Bx^2-3Bx-10B+Cx^2-6Cx+5C}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$
$$=\frac{(A+B+C)x^2+(A-3B-6C)x+(-2A-10B+5C)}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

دیده می‌شود که مخرج‌ها با هم مساوی اند، بنابرین صورت‌ها نیز با هم مساوی می‌باشند. با استفاده از خواص مطابقت (ضریب‌های حدود مشابه با هم مساوی اند) می‌توانیم بنویسیم که:

$$\begin{cases} A+B+C=4 \\ A-3B-6C=-1 \\ -2A-10B+5C=-39 \end{cases}$$

از حل سیستم معادلات فوق $A=2$, $B=3$ و $C=-1$ به‌دست می‌آید؛ پس:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{2}{x-5}+\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x+2}$$

مثال 2: کسر $\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}$ را به کسور اولیهٔ آن تجزیه نمایید.

حل: ابتدا کسر فوق‌الذکر را به کسر واقعی تبدیل و بعد آز آن طریقهٔ فوق را بالای آن تطبیق می-نماییم:

$$\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}=3x+\frac{4x-1}{x^2-2x-8}\Rightarrow\frac{4x-1}{x^2-2x-8}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+2}$$
$$=\frac{A(x+2)+B(x-4)}{(x-4)(x+2)}=\frac{(A+B)x+(2A-4B)}{x^2-2x-8}$$

$$\left.\begin{matrix} A+B=4 \\ 2A-4B=-1 \end{matrix}\right\}\Rightarrow A=\frac{5}{2} \quad , \quad B=\frac{3}{2}$$

$$\frac{3x^2-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}=3x+\frac{5}{2(x-4)}+\frac{3}{2(x+2)}$$

حالت دوم:

هرگاه بعضی از عوامل ضربی مخرج پولینوم درجه یک تکرار گردیده باشد؛ یعنی اگر عامل $x-x_0$ ، n دفعه تکرار گردیده باشد، می‌توانیم بنویسیم که:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x-x_0} + \frac{B}{(x-x_0)^2} + \cdots + \frac{N}{(x-x_0)^n}$$

مثال 1: کسر واقعی $\dfrac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$ را به کسرهای قسمی آن تجزیه کنید.

حل: عوامل ضربی پولینوم مخرج را به‌دست می‌آوریم:

$$x^3-4x^2+5x-2=(x-1)(x-2)(x-1)$$

$$\begin{aligned}\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2} &= \frac{3x^2-6x+2}{(x-2)(x-1)^2} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2} \\ &= \frac{A(x-1)^2+B(x-2)(x-1)+C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2} \\ &= \frac{(A+B)x^2+(-2A-3B+C)x+(A+2B-2C)}{(x-2)(x-1)^2}\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} A+B&=3 \\ -2A-3B+C&=-6 \\ A+2B-2C&=2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} A&=2 \\ B&=1 \\ C&=1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2} = \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

حالت سوم:

هرگاه عوامل ضربی مخرج پولینوم درجه دو که قابل تجزیه نبوده و تکرار هم نگردیده است، یک جزو پولینوم واقعی $\dfrac{P_m(x)}{P_n(x)}$ می‌باشد که شکل کسر $\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ را دارد.

مثال 1: کسر $\dfrac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}$ را به کسور قسمی آن تجزیه کنید.

حل: عوامل ضربی پولینوم مخرج عبارت است از: $x^3+3x^2+6x+4=(x+1)(x^2+2x+4)$

از آنجا که عامل x^2+2x+4 در اعداد حقیقی حل ندارد، یعنی قابل تجزیه نیست، می‌توانیم بنویسیم که:

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+4}+\frac{C}{x+1}=\frac{(Ax+B)(x+1)+C(x^2+2x+4)}{x^3+3x^2+6x+4}$$

$$=\frac{(A+C)x^2+(A+B+2C)x+(B+4C)}{x^3+3x^2+6x+4}$$

$$\left.\begin{array}{l}A+C=5\\A+B+2C=8\\B+4C=9\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}A=3\\B=1\\C=2\end{array}\Rightarrow\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{3x+1}{x^2+2x+4}+\frac{2}{x+1}$$

تمرین

کسرهای زیر را به کسور قسمی تجزیه نمایید:

-1

$a)\ \dfrac{-x^2+2x-12}{x^3+2x^2+6x+5}$ $\quad b)\ \dfrac{4x^2-3x+8}{x^3-2x+4}$ $\quad c)\ \dfrac{2x^4-8x^3+7x^2-3x+4}{x^2-9x+3}$

-2

$a)\ \dfrac{1}{x^4(x+1)}$ $\quad b)\ \dfrac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$ $\quad c)\ \dfrac{x^4+1}{x^2(x-1)}$

$d)\ \dfrac{3x^2+5x+10}{x^3+2x^2-4x-8}$ $\quad e)\ \dfrac{3x^2-18x+36}{x^3-6x^2+9x}$

-3

$a)\ \dfrac{3x+7}{(x^2+x+1)(x^2-4)}$ $\quad b)\ \dfrac{x^2+3x+4}{x^4-2x^2+1}$

$c)\ \dfrac{x^2+13x+10}{x^3-5x^2}$ $\quad d)\ \dfrac{x^5}{x^4-1}$

انتیگرال‌های توابع اکسپوننشیل

روابط مقابل را با هم مقایسه کنید.

$$\log_a b = x$$

$$a^x = b$$

- تابع $f(x) = a^x$ چه نوع تابعی است؟
- یک مثال از تابع لوگاریتمی را بنویسید؟
- رابطهٔ $\log_a x = c$ را به شکل اکسپوننشیل بنویسید؟

از فعالیت فوق نتیجهٔ زیر را می‌توانیم بنویسیم:

برای تابع اکسپوننشیل $f(x) = e^x$ داریم که: $\int e^x dx = e^x + C$ است، پس به صورت عموم داریم که:

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a \in IR^+ \ , a \neq 1)$$

ثبوت: با استفاده از طریقه تعویضی داریم:

$$u = a^x$$

$$du = \ln a \cdot a^x dx$$

$$dx = \frac{du}{\ln a \cdot a^x} = \frac{du}{u \ln a}$$

$$\int a^x dx = \int u \frac{du}{u \ln a} = \frac{1}{\ln a} \int dx$$

$$\frac{1}{\ln a} u = \frac{1}{\ln a} a^x = \frac{a^x}{\ln a} \Rightarrow \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

مثال: انتیگرال $f(x) = 2^{x-3}$ را دریابید.

حل: با استفاده از قوانین طاقت داریم که:

$$2^{x-3} = \frac{2^x}{2^3} = \frac{1}{8}2^x$$

$$\int 2^{x-3}dx = \int \frac{1}{8}2^x dx = \frac{1}{8}\int 2^x dx$$

$$\frac{1}{8}\int 2^x dx = \frac{1}{8}\cdot\frac{2^x}{\ln 2} + C$$

مثال 2 : انتیگرال توابع اکسپوننشیل زیر را به‌دست آورید.

$1)\ \int 3^{x+1}\,dx = ?$ $\qquad$ $2)\ \int 6^{x-1}\,dx = ?$

حل:

$$1)\ \int 3^{x+1}\,dx = ?$$

$$3^{x+1} = 3^x \cdot 3$$

$$\int 3^x \cdot 3\,dx = 3\int 3^x\,dx = 3\cdot\frac{3^x}{\ln 3} + C$$

$$2)\ \int 6^{x-1}\,dx = ?$$

$$6^{x-1} = \frac{6^x}{6} = \frac{1}{6}\cdot 6^x$$

$$\int \frac{1}{6}6^x\,dx = \frac{1}{6}\int 6^x\,dx = \frac{1}{6}\cdot\frac{6^x}{\ln 6} + C$$

تمرین

انتیگرل‌های توابع اکسپوننشیل زیر را محاسبه کنید.

$a)\ \int 3^{x+1}dx$ $\qquad$ $b)\ \int 2^{-x}dx$ $\qquad$ $c)\ \int a^{x+b}dx$

$d)\ \int \frac{1}{a^x}dx$ $\qquad$ $e)\ \int 2^x\cdot 3^x dx$ $\qquad$ $f)\ \int \frac{2^x}{3^x}dx$

$g)\ \int \frac{4^{x+3}}{2^x}dx$ $\qquad$ $h)\ \int \frac{5^x+3^x}{2^x}dx$ $\qquad$ $i)\ \int (1+2^x)dx$

انتیگرال‌های توابع لوگاریتمی

نشان دهید که تابع در کدام حالت نزولی و
در کدام حالت صعودی است.

$$y = a^x$$

$$\int a^x dx = ?$$

فعالیت

- لوگاریتم به چند نوع است، روابط عمومی آن‌را بنویسید؟
- معادلات $x = b^y$ و $y = \log_b x$ با یکدیگر چه رابطه‌یی دارند؟
- آیا می‌توانیم از توابع لوگارتمی انتیگرال بگیریم؟

نتیجهٔ فعالیت فوق را می‌توان به طور زیر بیان کرد:

هرگاه $f(x) = \ln x \ , \ (x \in IR^+)$ باشد، برای لوگاریتم طبیعی تابع می‌توانیم بنویسیم که:

$$\int \ln x \, dx = x \cdot \ln x - x + C$$

به صورت عموم برای لوگاریتم توابع داریم که: $f(x) = \log_a x \quad (x, a \in IR^+, a \neq 1)$

$\int \log_a x \, dx = x \log_a \dfrac{x}{e}$.

ثبوت:

1- اگر $a = e$ وضع شود؛ پس:

$$\int \log_a x \, dx = x \log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_e x \, dx = \int \ln x dx = x \log_e \frac{x}{e} = x(\log_e x - \log_e e)$$

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

-2

$$\int \log_a x\,dx = x\log_a \frac{x}{e} + C$$

$$u = \log_a x \quad , \quad du = \frac{1}{x}\log_a e\,dx$$

$$dv = dx \quad , \quad v = x$$

$$\int \log_a x\,dx = x\log_a x - \int x\frac{1}{x}\log_a e\,dx$$

$$= x\log_a x - \log_a e\int dx$$

$$= x\log_a x - x\log_a e = x(\log_a x - \log_a e) = x\log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_a x\,dx = x\ \log_a \frac{x}{e} + C$$

مثال: انتیگرال $\int \ln 3xdx$ را به‌دست آورید:

حل:

$$\int \ln 3xdx = \int (\ln 3 + \ln x)dx = \int \ln 3\,dx + \int \ln x\,dx$$

$$= x\ln 3 + x\ln x - x$$

$$= x(\ln 3 + \ln x) - x = x(\ln 3x - 1)$$

یادداشت:

I- با روش تعویض *Substitution* می‌توان انتیگرال نامعین را حل کرد.

مثال 1: انتیگرال‌های زیر را دریابید:

حل:

$$a)\quad I = \int \frac{1}{2}e^{-2x-3}dx$$

$$-2x-3 = u, \qquad -2 = \frac{du}{dx} \quad , \quad dx = -\frac{1}{2}du$$

$$I = \int \frac{1}{2}e^{u}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)du = -\frac{1}{4}\int e^{u}du = -\frac{1}{4}e^{u} + C = -\frac{1}{4}e^{-2x-3} + C$$

$$b)\quad I = \int \frac{2dx}{x+2}$$

$$x+2 = u, \qquad 1 = \frac{du}{dx} \qquad dx = du$$

$$I = \int \frac{2du}{u} = 2\int \frac{du}{u} = 2\ln|u| + C = 2\ln|x+2| + C$$

مثال2: انتیگرال $f(x)=e^{2x}$ را دریابید.

حل: با استفاده از تعویض داریم که:

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow \int f(x)dx=\int e^{2x}dx=?$$

$$u=2x \Rightarrow du=2dx$$

$$dx=\frac{du}{2}$$

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow \int f(x)dx=\int e^{u}\cdot\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int e^{u}\,du$$

$$\int e^{2x}dx=\frac{e^{u}}{2}+C=\frac{e^{2x}}{2}+C=\frac{1}{2}e^{2x}+C$$

امتحان: $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+C \Rightarrow F'(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2=e^{2x}=f(x)$

مثال3: انتیگرال $f(x)=x\cdot\ln x^{2}$ را حساب کنید.

حل:

$$f(x)=x\cdot\ln x^{2} \Rightarrow \int f(x)dx=\int (x\cdot\ln x^{2})dx=?$$

$$u=x^{2}$$

$$du=2x\,dx \Rightarrow xdx=\frac{1}{2}du$$

$$\int f(x)\,dx=\int x\cdot\ln u\cdot\frac{1}{2x}du=\frac{1}{2}\int \ln u\,du=\frac{1}{2}[u\cdot\ln u-u+C]=\frac{1}{2}u\cdot\ln u-\frac{1}{2}u+C$$

$$=\frac{1}{2}x^{2}\cdot\ln x^{2}-\frac{1}{2}x^{2}+C$$

II- انتیگرال‌های معین نیز از طریق تعویض حل می‌شوند:

مثال1: انتیگرال $\int_{-1}^{1} e^{2x}\,dx$ را پیدا کنید.

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow \int_{-1}^{1} e^{2x}\,dx$$

$$u=2x \Rightarrow du=2\,dx \Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$$

$$\left.\begin{array}{l} x=-1,\, u=2x \Rightarrow u=2(-1)=-2 \\ x=1,\, u=2x \quad \Rightarrow u=2(1)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{-1}^{1} e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^{u}\,du=\frac{1}{2}\left[e^{u}\right]_{-2}^{2}=3.627$$

مثال2: قیمت انتیگرال $f(x)=\int_1^2 2x\cdot\ln x^2 dx$ را پیدا کنید.

$$u=x^2$$

$$du=2x\,dx \Rightarrow dx\frac{1}{2x}du$$

$$\left.\begin{array}{l} x=1 \quad , \quad u=x^2=1 \\ x=2 \quad , \quad u=x^2=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \int_1^2 2x\cdot\ln x^2 dx=\int_1^4 2x\cdot\ln u\cdot\frac{1}{2x}du=\int_1^4 \ln u\,du$$

$$=\left[u\cdot\ln u-u\right]_1^4=\left[4\cdot\ln 4-4\right]-\left[1\cdot\ln 1-1\right]\approx 2.545$$

تمرین

انتیگرال‌های زیر را حل کنید:

$a)\ \int \ln 2x^3 dx$ $\qquad b)\ \int \ln\sqrt{x}dx$ $\qquad c)\ \int \log\frac{x}{2}dx$

$d)\ \int 3\log\frac{1}{x}dx$ $\qquad e)\ \int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}}dx$

محاسبهٔ انتیگرال توسط کسور قسمی

کسور قسمی کسر مقابل را دریابید.

$$\frac{5}{x^2-3x+2}=\frac{?}{(x-2)}+\frac{?}{(x-1)}$$

پیش از این تجزیهٔ کسرها را به کسور قسمی مطالعه نمودیم. حالا می‌خواهیم انتیگرال توابع را با استفاده از کسور قسمی تحت مطالعه قرار دهیم:

مثال 1: $\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx$ را حساب کنید.

حل: با استفادهٔ تجزیهٔ کسور قسمی می‌نویسیم:

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x-4)}$$

$$\frac{A(x-4)+B(x-2)}{(x-2)(x-4)}=\frac{Ax-4A+Bx-2B}{(x-2)(x-4)}=\frac{(A+B)x-4A-2B}{(x-2)(x-4)}$$

$$A+B=7$$

$$-4A-2B=-12$$

$$A=7-B$$

$$-4(7-B)-2B=-12$$

$$-28+4B-2B=-12$$

$$-28+2B=-12$$

$$2B=16 \quad \Rightarrow \quad B=8$$

$$A=7-8=-1$$

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8}=-\frac{1}{x-2}+\frac{8}{x-4}$$

پس می‌توانیم بنویسیم که:

$$\int\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=\int\frac{-1}{x-2}dx+\int\frac{8}{x-4}dx$$

$$\int\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=-\int\frac{1}{x-2}dx+8\int\frac{1}{x-4}dx$$

$$=-\ln|x-2|+8\ln|x-4|+C=\ln(x-2)^{-1}+\ln(x-4)^8+C$$

$$=\ln\left[(x-2)^{-1}\cdot(x-4)^8\right]=\ln\left[\frac{(x-4)^8}{x-2}\right]+C$$

مثال 2: $\int \frac{-5x+9}{x^2+x-6}dx$ را حساب کنید.

حل: مخرج را به فکتور تجزیه می کنیم: $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$

پس:

$$\frac{-5x+9}{x^2+x-6}=\frac{-5x+9}{(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}$$

$$\frac{A(x+3)+B(x-2)}{(x-2)(x+3)}=\frac{Ax+3A+Bx-2B}{(x-2)(x+3)}=\frac{(A+B)x+3A-2B}{(x-2)(x+3)}$$

$$(A+B)x+3A-2B=-5x+9$$

$$A+B=-5 \Rightarrow A=-5-B$$

$$3A-2B=-5x+9$$

قیمت‌های عددی A و B عبارت اند از:

$$3(-5-B)-2B=9$$

$$-15-5B=9$$

$$-5B=24$$

$$B=-\frac{24}{5}$$

$$A=-5+\frac{24}{5}=\frac{-25+24}{5}=-\frac{1}{5}$$

$$\frac{-5x+9}{x^2+x-6}=\frac{-\frac{1}{5}}{x-2}-\frac{\frac{24}{5}}{x+3}$$

$$\int\frac{-5x+9}{x^2+x-6}=\int\frac{-\frac{1}{5}}{x-2}dx-\int\frac{\frac{24}{5}}{x+3}dx=-\frac{1}{5}\int\frac{1}{x-2}dx-\frac{24}{5}\int\frac{1}{x+3}dx$$

$$=-\frac{1}{5}\ln(x-2)-\frac{24}{5}\ln(x+3)$$

$$=\ln(x-2)^{-\frac{1}{5}}+\ln(x+3)^{-\frac{24}{5}}=\ln\left[(x-2)^{-\frac{1}{5}}\cdot(x+3)^{-\frac{24}{5}}\right]+C$$

تمرین

قیمت انتیگرال‌های زیر را توسط کسور قسمی به‌دست آورید:

$a)\ \int\frac{x+2}{x^3-3x^2-x+3}dx$ $\quad b)\ \int\frac{x-2}{x^2-6x+5}dx$ $\quad c)\ \int\frac{x^6}{x^4+3x^2+2}dx$

نکات مهم فصل پنجم

- اگر $f(x)=e^x$ باشد، مشتق تابع عبارت از $f'(x)=e^x$ است.
- اگر $f(x)=a^x$ باشد، مشتق این تابع عبارت از $f'(x)=a^x\cdot\ln a$ است.
- اگر $f(x)=\log_a x$ باشد، مشتق این تابع عبارت از $f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}$ است.
- اگر $f(x)=\log_a g(x)$ باشد، مشتق این تابع $(\log_a g(x))'=\frac{g'(x)}{g(x)}\log_a e$ است.
- **کسور قسمی:** کسرهای کوچک یک کسر واقعی که به شکل حاصل جمع نوشته شده باشد، طوری که اگر آنها با هم جمع گردند، کسر داده شدهٔ واقعی به‌دست آید، کسور قسمی نامیده می‌شوند.
- هرگاه در $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ پولینوم مخرج $P_n(x)$ از عوامل ضربی‌یی که تکرار نشده، تشکیل گردیده باشد، به شکل زیر می‌توان آن را تجزیه کرد:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}+\frac{C}{x-x_3}+\cdots+\frac{N}{x-x_n}$$

- هرگاه بعضی از عوامل ضربی مخرج پولینوم درجه یک تکرار گردیده باشد، یعنی اگر عامل $x-x_0$، n دفعه تکرار گردیده باشد، می‌توانیم بنویسیم که:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_0}+\frac{B}{(x-x_0)^2}+\cdots+\frac{N}{(x-x_0)^n}$$

- عوامل ضربی مخرج پولینوم درجه دو که قابل تجزیه نبوده و تکرار هم نگردیده است، یک جزو پولینوم واقعی $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ می‌باشد که شکل کسر $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ را دارد.
- برای توابع اکسپوننشیل می‌توانیم بنویسیم که:

$$\int e^x dx=e^x+C \quad , \quad \int a^x dx=\frac{a^x}{Lna}+C \quad , \quad (a\in IR^+ \ , \ a\neq 1)$$

- برای توابع لوگارتمی می‌توانیم بنویسیم که:

$$\int \ln dx = x\ln x - x + C \quad , \quad \int \log_a x\,dx = x\log_a\frac{x}{e}+C$$

- بعضی از توابع بدون تعویض حل می‌گردند؛ مانند:

$$f(x)=e^x \Rightarrow \int f(x)\,dx = \int e^x\,dx = e^x + C$$

تمرینات عمومی فصل پنجم

1- مشتق تابع $f(x)=\ln(\frac{x-2}{x+2})$ را پیدا کنید؟

2- مشتق تابع $f(x)=\ln\sqrt{x-1}$ را دریابید؟

3- مشتق تابع $y=2x^{2x}$ را دریابید؟

4- مشتق تابع $f(x)=\log\sqrt{x^3}$ را دریابید؟

5- کسور واقعی زیر را به اجزای آن تجزیه کنید.

1) $\frac{x+1}{x^2-x-6}$ 2) $\frac{x^2-x+1}{x^3+2x^2+x}$ 3) $\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}$

6- انتیگرال‌های زیر را دریابید؟

1) $\int 5t^7 dt$

2) $\int \frac{x^3-3}{x^2}dx$

3) $\int (2\cos x-5\sin x+e^x)dx$

4) $\int \sqrt{\cos x}\sin x dx$

5) $\int xe^{-x}dx$

6) $\int\frac{5}{(2x+1)(x-2)}dx$

7) $\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}\ dx$

7 – مشتق توابع زیر را دریابید.

$a)\ \ y=\ln(x^2+x+1)$

$b)\ \ y=\ln(\sin x)$

$c)\ \ y=e^{x^2+1}$

$d)\ \ y=\sqrt[x]{2}$

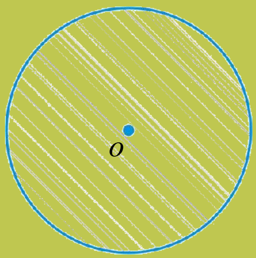
فصل ششم

تطبیقات انتیگرال

محاسبهٔ مساحت محصور شده توسط یک منحنی

Accounting of Area bounded by one Curve

فارمول مساحت دایرهٔ مقابل را که در آن قسمتی از یک سطح توسط یک منحنی بسته محصور شده است دریافت کنید.



تابع $y=1-x^2$ داده شده است:

- نقطهٔ بحرانی(Critical Point) و تقاطع با محور x تابع فوق را یافته و گراف آن‌را رسم نمایید.
- مساحت سطح محصور شده توسط منحنی تابع $y=1-x^2$ و محور x را با استفاده از انتیگرال حساب کنید.
- فعالیت فوق را برای تابع $y=-x^2+2x$ در روی محور x تکرار نموده و مساحت سطح محصور شده توسط منحنی و محور x را حساب کنید.

از انجام فعالیت فوق نتایج زیر به دست می‌آید:

_ انتیگرال $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$ مساحت سطحی را نمایش می‌دهدکه توسط منحنی تابع $y=f(x)$ و محور x در انتروال $[a,b]$ محصور شده است.

_ اگر تابع $f(x)$ در انتروال بستهٔ $[a,b]$ متمادی و مثبت باشد؛ یعنی $y=f(x)\geq 0$، در این حالت گراف تابع $f(x)$ همیشه در قسمت بالایی محور x است. اما اگر $y=f(x)\leq 0$ باشد، در این حالت گراف تابع $f(x)$ در قسمت پایینی محور x قرار دارد و منفی است.

مثال 1: مساحت سطح محصور شده توسط منحنی تابع $x=4-y^2$ و محور y را حساب کنید.

حل: ابتدا نقطهٔ بحرانی و تقاطع نقاط با محور y را یافته و بعد گراف آن‌را ترسیم می‌نماییم:

برای به‌دست آوردن نقطهٔ بحرانی، ابتدا از تابع مشتق گرفته و آن را مساوی با صفر قرار می‌دهیم و

برای به‌دست آوردن نقاط تقاطع با محورات تابع را مساوی با صفر قرار می‌دهیم:

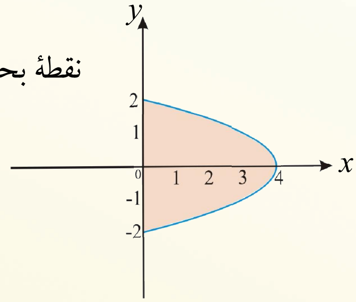
$$x=4-y^2 \Rightarrow x'=-2y=0$$

$$x'=0 \Rightarrow y=0$$

$y=0\,,\quad x=4-y^2 \Rightarrow x=4-0 \Rightarrow x=4 \quad \Rightarrow (4,0)$ نقطهٔ بحرانی

$$x=0\quad,\quad 4-y^2=0 \Rightarrow y^2=4$$

$y=\pm 2 \quad \Rightarrow (0,2)\quad,\quad (0,-2)$ نقاط تقاطع با محورات



چون هر دونقطهٔ معادلهٔ $x=4-y^2$ در انتروال $[-2,2]$ نظر به محور x متناظر اند، پس با در نظر داشت نصف مساحت سرحدات انتیگرال را تغییر داده وآن‌را ضرب 2 می‌نماییم:

$$A=\int_{-2}^{2}(4-y^2)\,dy=2\int_{0}^{2}(4-y^2)dy=2[4y-\frac{y^3}{3}]_0^2$$

$$A=2\,[(4\cdot 2-\frac{2^3}{3})-0]=2\,(8-\frac{8}{3})=2\,(\frac{24-8}{3})=2\,(\frac{16}{3})=\frac{32}{3}$$

مثال 2: مساحت سطح محصور شده توسط منحنی تابع $y=1-\frac{1}{2}x^2$ و محور x را محاسبه کنید.

حل: برای تعیین سطح محصورشده، ابتدا نقطهٔ بحرانی و تقاطع با محور x را به دست می‌آوریم:

$$y=1-\frac{1}{2}x^2\;,\; y'=-x$$

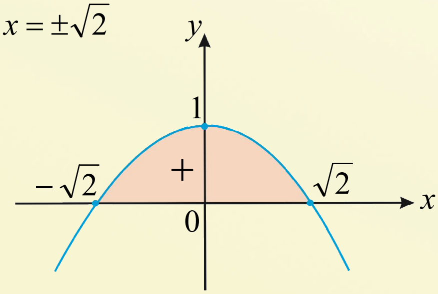
$$y'=0 \Rightarrow x=0$$

$x=0,\; y=1-\frac{1}{2}x^2=1 \quad\Rightarrow y=1-\frac{1}{2}0^2 \quad\Rightarrow y=1 \quad\Rightarrow (0,1)$ نقطهٔ بحرانی

$$y=0, 1-\frac{1}{2}x^2=0 \quad\Rightarrow -\frac{1}{2}x^2=-1 \quad\Rightarrow x^2=2,\; x=\pm\sqrt{2}$$

$$x_1=\sqrt{2}\quad,\quad x_2=-\sqrt{2}$$

$(\sqrt{2},0)\,,\;(-\sqrt{2},0)$ نقاط تقاطع با محورات



$$A=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(1-\frac{1}{2}x^2)\,dx=2\int_{0}^{\sqrt{2}}(1-\frac{1}{2}x^2)\,dx=2([x-\frac{1}{6}x^3]_0^{\sqrt{2}})$$

$$A=2(\sqrt{2}-\frac{(\sqrt{2})^3}{6}-0)=2(\frac{6\sqrt{2}-(\sqrt{2})^3}{6})=2(\frac{6\sqrt{2}-\sqrt{8}}{6})$$

$$=(\frac{6\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{3})=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$A=1.8853$$

مثال3: گراف تابع $y=x^2-3$ با محور x یک سطح را محصور نموده است؛ مساحت این سطح را حساب کنید.

حل: ابتدا برای تعیین نمودن سطح گراف تابع، نقطهٔ بحرانی و نقاط تقاطع با محور x را به دست می‌آوریم:

$$y=x^2-3\Rightarrow y'=2x$$

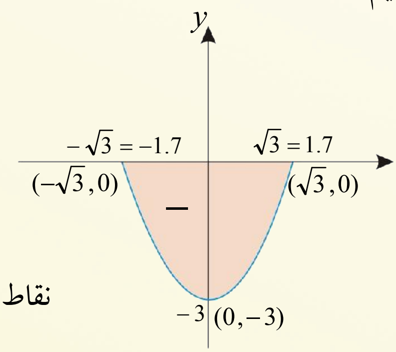
$$y'=0\Rightarrow x=0$$

$$x=0\ ,\ y=x^2-3\Rightarrow y=0^2-3$$

$\Rightarrow y=-3\Rightarrow(0,-3)$ نقطهٔ بحرانی

$$y=0\ ,\ \ x^2-3=0\Rightarrow x^2=3$$

$x=\pm\sqrt{3}\Rightarrow(\sqrt{3},0)\ ,\ (-\sqrt{3},0)$ نقاط تقاطع با محورات



چون تابع $y=x^2-3$ در انتروال $[-\sqrt{3}\ ,\ \sqrt{3}]$ متناظر است و همچنان گراف آن در قسمت پایینی محور x و انتیگرال آن منفی می‌باشد؛ برای دریافت مساحت کلی، مساحت نصف سرحدات را ضرب 2 می‌نماییم:

$$A_1=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(x^2-3)\,dx=-2\int_{0}^{\sqrt{3}}(x^2-3)\,dx=-2(\int_{0}^{\sqrt{3}}x^2\,dx-3\int_{0}^{\sqrt{3}}dx)=-2([\frac{1}{3}x^3]_0^{\sqrt{3}}-[3x]_0^{\sqrt{3}})$$

$$=-2(\frac{1}{3}[(\sqrt{3})^3-0]-3[\sqrt{3}-0])=-2(\frac{1}{3}(\sqrt{3})^3-3\sqrt{3})$$

$$=-\frac{2}{3}(\sqrt{3})^3+6\sqrt{3}=-\frac{2}{3}(1.7)^3+6(1.7)=-\frac{2}{3}(4.913)+10.2=-\frac{9.826}{3}+10.2$$

$$=-3.2753+10.2=6.9247$$

مثال 4: گراف منحنی تابع $y=x^2-3x$ را رسم و مساحت سطح محصور شده توسط منحنی مذکور و محور x را درانتروال $[-1,4]$ محاسبه کنید.

حل: نخست نقطهٔ بحرانی منحنی و نقاط تقاطع آن با محورات را دریافت می‌کنیم:

$$y=x^2-3x$$

$$y'=2x-3=0 \Rightarrow 2x=3\ ,\ x=\frac{3}{2}$$

$$x=\frac{3}{2}\ ,\quad y=x^2-3x \Rightarrow y=(\frac{3}{2})^2-3(\frac{3}{2})$$

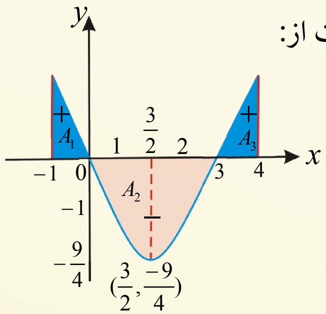
$$y=\frac{9}{4}-\frac{9}{2}=-\frac{9}{4}\ ,\quad (x,y)=(\frac{3}{2},-\frac{9}{4})$$ نقطهٔ بحرانی

چون $y''=2>0$ است، پس نقطه $(\frac{3}{2},-\frac{9}{4})$ نقطه اصغری مطلق تابع می‌باشد و محل تقاطع آن با محور x عبارت است از:

$$y=0 \Rightarrow x^2-3x=0$$

$$\Rightarrow x(x-3)=0$$

$$\Rightarrow x=0\ ,\ x=3$$



$$A=A_1-A_2+A_3=\int_{-1}^{0}(x^2-3x)\,dx-\int_{0}^{3}(x^2-3x)\,dx+\int_{3}^{4}(x^2-3x)\,dx$$

$$A=[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2]_{-1}^{0}-[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2]_{0}^{3}+[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2]_{3}^{4}$$

$$A=[(\frac{1}{3}\cdot 0-\frac{3}{2}\cdot 0)-(\frac{1}{3}\cdot(-1)^3-\frac{3}{2}\cdot(-1)^2)]-[(\frac{1}{3}\cdot 3^3-\frac{3}{2}\cdot 3^2)-(\frac{1}{3}\cdot 0-\frac{3}{2}\cdot 0)]+$$

$$[(\frac{1}{3}\cdot(4)^3-\frac{3}{2}\cdot(4)^2)-(\frac{1}{3}\cdot(3)^3-\frac{3}{2}\cdot(3)^2)]$$

$$=-(-\frac{1}{3}-\frac{3}{2})-(\frac{1}{3}\cdot 27-\frac{3}{2}\cdot 9)+(\frac{1}{3}\cdot 64-\frac{3}{2}\cdot 16)-(\frac{1}{3}\cdot 27-\frac{3}{2}\cdot 9)$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-\frac{27}{3}+\frac{27}{2}+\frac{64}{3}-\frac{48}{2}-\frac{27}{3}+\frac{27}{2}$$

$$=\frac{1-27+64-27}{3}+\frac{3+27-48+27}{2}=\frac{65-54}{3}+\frac{57-48}{2}=\frac{11}{3}+\frac{9}{2}=\frac{22+27}{6}=\frac{49}{6}$$

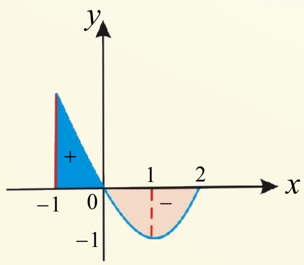
مثال5: مساحت سطح محصور شده توسط منحنی تابع $y = x^2 - 2x$ و محور x را در انتروال $[-1,2]$ دریابید.

حل: ابتدا نقطهٔ بحرانی و بعد از آن نقاط تقاطع با محور x را دریافت می‌کنیم:

$$y = x^2 - 2x \Rightarrow y' = 2x - 2 = 0$$
$$2x = 2 \Rightarrow x = 1$$
$$x = 1 \ , \quad y = x^2 - 2x = 1^2 - 2(1) = -1 \Rightarrow (1, -1)$$ نقطهٔ بحرانی

چون $y'' = 2 > 0$ است، پس تابع در نقطهٔ $(1,-1)$ یک اصغری مطلق دارد و نقاط تقاطع آن با محور x طور زیر است: $(1,-1)$

$$y = 0 \quad , \quad x^2 - 2x = 0$$
$$x(x-2) = 0$$
$$x_1 = 0 \ , \ x_2 = 2$$



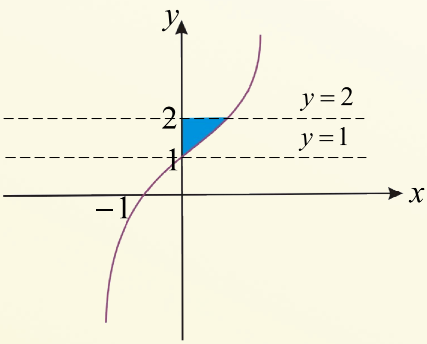
چون منحنی در انتروال $[-1,2]$ از مبدا می‌گذرد، منحنی در انتروال $[-1,0]$ بالای محور x و در انتروال $[0,2]$ تحت محور x است؛ بنابرین انتیگرال آن را منفی می‌گیریم:

$$A = \int_{-1}^{0} (x^2 - 2x)dx - \int_{0}^{2} (x^2 - 2x)\,dx = [\frac{1}{3}x^3 - x^2]_{-1}^{0} - [\frac{1}{3}x^3 - x^2]_{0}^{2}$$
$$= (0 - (-\frac{1}{3} - 1)) - ((\frac{8}{3} - 4) - 0) = -(-\frac{1}{3} - 1) - (\frac{8}{3} - 4) = -(\frac{-1-3}{3}) - (\frac{8-12}{3})$$
$$= -(\frac{-4}{3}) - (\frac{-4}{3}) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

تمرین

1- مساحت سطح محصور شده توسط منحنی تابع $y=\sin x$ و محور x را در انتروال $[-2\pi\ ,\ 2\pi]$ حساب کنید.

2- مساحت سطح محصور شده توسط منحنی تابع $y=x^3+1$ و محور y و خطوط $y=1$ و $y=2$ را نظر به شکل دریابید؟

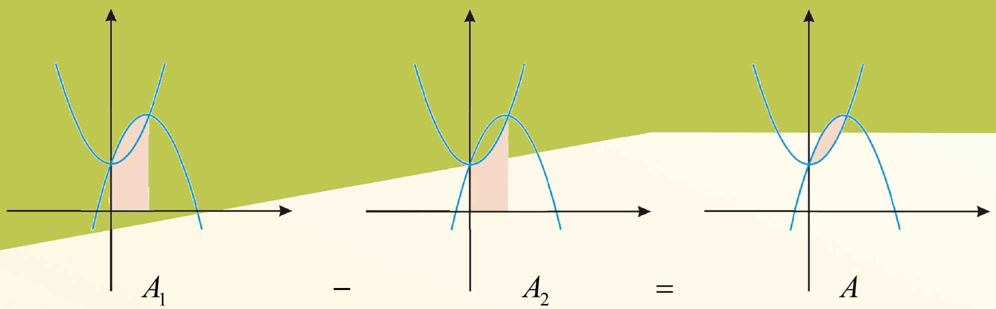


3- مساحت سطح محصور شده توسط منحنی تابع $y=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}+x}$ و محور x و دو خط $x=0$ و $x=1$ را حساب کنید.

محاسبهٔ مساحت محصور شده توسط دو منحنی

Accounting of area bounded by two curves

با در نظرداشت اشکال زیر، در مورد درست بودن رابطهٔ $A = A_1 - A_2$ چه می گویید؟



توابع $y_1 = 1 - x^2$ و $y_2 = x^2 - 1$ داده شده است:

- از رابطه $y_1 = y_2$ قیمت x را دریابید.
- با در نظرداشت قیمت‌های دریافت شده، گراف آنها را رسم کنید.
- چون گراف تابع y_1 بالاتر از تابع y_2 است، پس حاصل تفریق انتیگرال‌های توابع $(y_1 - y_2)$ را در انتروال تعیین شدهٔ x حساب کنید.
- فعالیت فوق را برای منحنی تابع $y = x^2$ و خط $y = x + 2$ تکرار نموده و مساحت سطح محصور شدهٔ توسط آنها را حساب کنید.

از فعالیت فوق به نتایج زیر دست می‌یابیم:

- برای محاسبهٔ سطح محصور شده توسط دو منحنی $y_1 = f(x)$ و $y_2 = g(x)$ در صورتی که $f(x) > g(x)$ باشد یعنی گراف تابع $f(x)$ بالاتر از گراف تابع $g(x)$ قرار داشته باشد؛ ابتدا نقطهٔ تقاطع هر دو منحنی را یافته و بعد از آن مساحت بین منحنی با محور x را در انتروال $[a,b]$ محاسبه می کنیم:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx$$

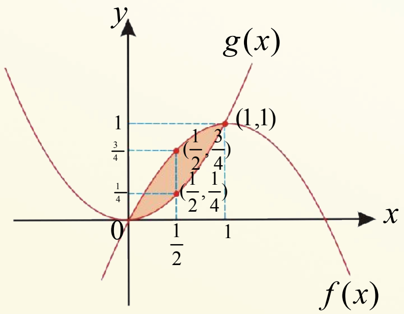
- اگر $f(x) < g(x)$ باشد؛ یعنی گراف تابع $g(x)$ بالاتر از گراف تابع $f(x)$ قرار داشته باشد داریم که:

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx$$

مثال 1: مساحت سطح محصور شده توسط دو منحنی $f(x) = 2x - x^2$ و $g(x) = x^2$ را حساب کنید.

حل: ابتدا نقاط تقاطع هر دو منحنی را می‌یابیم:

$$f(x) = 2x - x^2 \;,\; g(x) = x^2$$
$$f(x) = g(x) \Rightarrow 2x - x^2 = x^2$$
$$2x - x^2 - x^2 = 0$$
$$2x - 2x^2 = 0$$
$$2x(1-x) = 0$$
$$2x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$
$$1 - x = 0 \Rightarrow x_2 = 1$$



نظر به گراف بالا، نقاط تقاطع هر دو منحنی عبارت از $(1{,}1)$ و $(0{,}0)$ است، حال مساحت محصور شده را دریافت می کنیم:

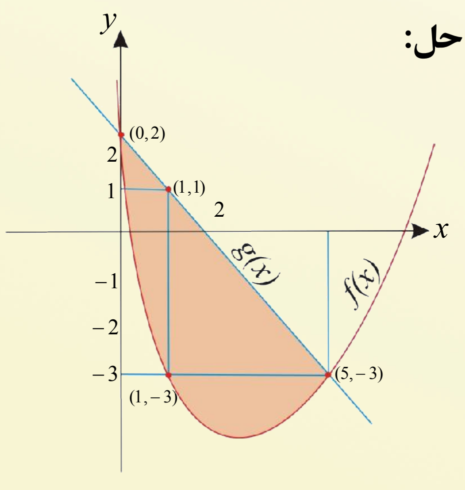
$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] = \int_0^1 [2x - x^2 - x^2]\,dx = \int_0^1 [2x - 2x^2] = [\frac{2x^2}{2} - \frac{2x^3}{3}]_0^1$$
$$= [x^2 - \frac{2}{3}x^3]_0^1 = (1 - \frac{2}{3}) - 0 = \frac{3-2}{3} = \frac{1}{3}$$

مثال 2: مساحت سطح محصور شده توسط منحنی $f(x) = x^2 - 6x + 2$ و خط $g(x) = 2 - x$ را حساب کنید.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 - 6x + 2 \\ g(x) = 2 - x \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = g(x)$$
$$x^2 - 6x + 2 = 2 - x \Rightarrow x^2 - 6x + 2 - 2 + x = 0$$
$$x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(x-5) = 0$$
$$x_1 = 0 \;,\; x_2 = 5$$

$\Rightarrow (0{,}2)\;,\;(5{,}-3)$ نقاط تقاطع خط و منحنی



از شکل معلوم می‌شود که گراف $g(x)$ بالاتر از گـراف تـابع $f(x)$ قـرار دارد بـه ایـن معنـی کـه:

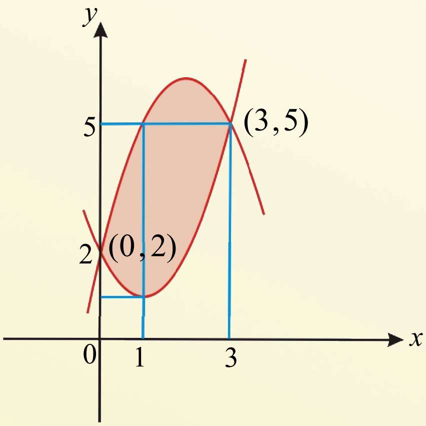
$g(x) > f(x)$

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx = \int_0^5 (2 - x - x^2 + 6x - 2)dx$$
$$= \int_0^5 (-x - x^2 + 6x)\,dx = \int_0^5 (-x^2 + 5x)\,dx$$
$$= [-\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2}]_0^5 = (-\frac{125}{3} + 5\cdot\frac{25}{2}) - 0 = -\frac{125}{3} + \frac{125}{2}$$
$$= \frac{-250 + 375}{6} = \frac{125}{6}$$

مثـــال3: مـساحت سـطح محـصور شـده توسـط منحنـی‌هـای توابـع $f(x) = -x^2 + 4x + 2$ و $g(x) = x^2 - 2x + 2$ را دریابید.

حل:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 4x + 2 \\ g(x) &= x^2 - 2x + 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(x) = g(x)$$
$$-x^2 + 4x + 2 = x^2 - 2x + 2$$
$$\Rightarrow -x^2 + 4x + 2 - x^2 + 2x - 2 = 0$$
$$-2x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(-2x + 6) = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad , \quad -2x = -6 \Rightarrow x_2 = 3$$



نقاط تقاطع دو منحنی $(3,5)$, $(0,2)$

و از شکل دیده می‌شود که گراف تابع $f(x)$ بالاتر از گراف تابع $g(x)$ قـرار دارد بـه ایـن معنـی که $g(x) < f(x)$ است.

$$A=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\int_0^3(-x^2+4x+2)dx-\int_0^3(x^2-2x+2)dx$$
$$=[-\frac{x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}+2x]_0^3-[\frac{x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}+2x]_0^3$$
$$=-\frac{1}{3}\cdot 27+2\cdot 9+6-0-\frac{1}{3}\cdot 27+9-6+0$$
$$=-9+18-9+9$$
$$=9$$

تمرین

1- مساحت سطح محصورشده توسط دو منحنی $y=x^2$ و $y=-x^2+4x$ را دریابید.

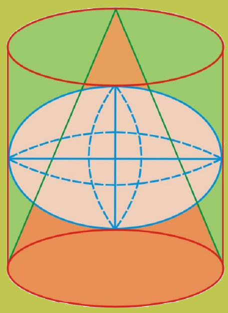
2- مساحت سطح محصور شده توسط پارابول $y^2=2x-2$ و $y=x-5$ را حساب کنید.

3- مساحت سطح محصور شده توسط منحنی $y^2=2x+6$ و خط $y=x-1$ را محاسبه کنید.

محاسبهٔ حجم اجسام دورانی

Accounting of rounding things Volume

نسبت بین احجام شکل مقابل را پیدا کنید.



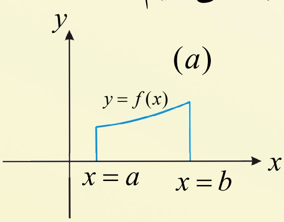
در صنوف گذشته، حجم اجسام را با استفاده از فورمول‌هایی که بدون ثبوت آنها را قبول کرده بودیم، به‌دست می‌آوردیم؛ اما در اینجا فارمول‌های حجم اجسام را با استفاده از انتیگرال‌های معین ثابت می‌کنیم.

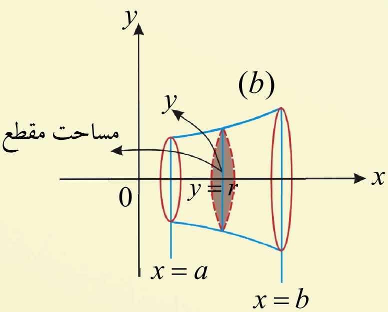
فعالیت

- یک خط مستقیم و یک نقطه را در فضا طوری در نظر بگیرید که نقطه در قسمت وسطی خط مذکور قرار داشته باشد.
- جسمی را که از دوران خط مستقیم حول نقطه به دست می‌آید، نام بگیرید.
- فورمول حجم جسم مذکور را بنویسید و بگویید که چطور آن را ثابت می‌کنیم؟

نتیجهٔ فعالیت فوق را چنین بیان می‌کنیم:

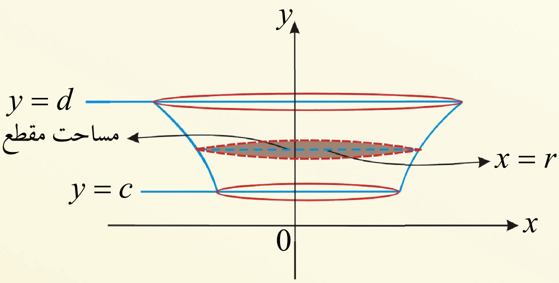
- هرگاه مساحت منحنی تابع متمادی $y=f(x)$ نظر به شکل (a) توسط خطوط $x=a$ و $x=b$ محصور شده باشد؛ جسمی که از دوران مساحت بین منحنی تابع فوق حول محور x به وجود می‌آید، شکل (b) به گونهٔ تقریبی استوانه‌یی می‌باشد.





ارتفاع استوانه $\Delta x = b - a$ می‌باشد و سطح آن توسط سطح دایروی محصور گردیده که این سطح را مقطع گویند. ما می‌دانیم که مساحت دایره نظر به محور x, $A(x)=\pi r^2$ و شعاع این مقطع نظر به شکل، موازی با محور y است؛ بنابرین $y = r$ می‌شود و فورمول حجم این جسم نظر به مجموع ریمان به طور زیر به دست می‌آید:

$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x)\Delta x = \int_a^b \pi r^2\, dx = \int_a^b \pi y^2\, dx = \int_a^b \pi [f(x)]^2\, dx$$



- اگر مساحت منحنی تابع $x = f(y)$ توسط خطوط $y=c$ و $y=d$ محصور شده باشد؛ مساحت مقطع چنین استوانه‌یی نظر به محور y, $A(y)=\pi r^2$ و ارتفاع آن $\Delta y = d - c$ و شعاع آن $x = r$ می‌باشد. حجمی که از دوران این مساحت به دست می‌آید، چنین است:

$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(y)\Delta y = \int_a^b \pi r^2\, dy = \int_a^b \pi x^2\, dy = \int_a^b \pi [f(y)]^2\, dy$$

حجم اجسام دورانی به کمک انتیگرال‌ها به طور زیر ثبوت می‌گردد:

1: حجم کره را با استفاده از انتیگرال محاسبه کنید.

ثبوت: می‌دانیم سطح کره از دوران نیم‌دایره حول قطرش به دست می‌آید و معادلهٔ دایره عبارت است از: $x^2 + y^2 = r^2$

حال حجم نصف کره را به دست آورده و آن‌را دو چند می‌کنیم تا حجم کل کره به دست آید.

$x^2 + y^2 = r^2$

$y^2 = r^2 - x^2$

$$V = \int_{-r}^{r} \pi y^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx$$

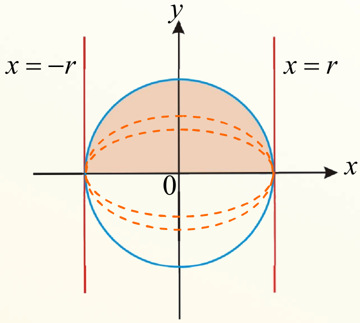
$$= 2\pi \int_{0}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = 2\pi [r^2 x - \frac{x^3}{3}]_0^r$$

$$= 2\pi [(r^3 - \frac{r^3}{3}) - 0]$$

$$= 2\pi (\frac{3r^3 - r^3}{3})$$

$$= 2\pi (\frac{2r^3}{3})$$

$$V(\text{حجم کره}) = \frac{4}{3}\pi r^3$$



2: حجم مخروط را توسط انتیگرال محاسبه کنید.

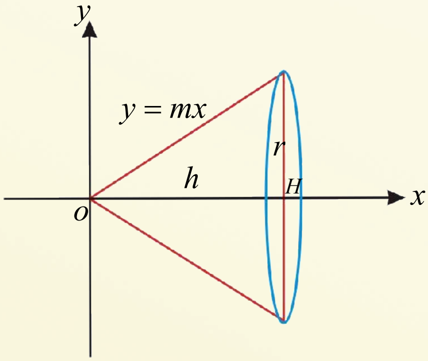
ثبوت: چون سطح مخروطی از دوران خط $y = mx$ حول محور x به دست می‌آید، بنابرین:

$$V = \int_{0}^{h} \pi y^2 dx$$

$$= \int_{0}^{h} \pi m^2 x^2 dx = \pi m^2 \int_{0}^{h} x^2 dx$$

$$= \pi m^2 [\frac{x^3}{3}]_0^h = \pi m^2 (\frac{h^3}{3})$$

$$= \frac{\pi h}{3} (mh)^2$$



در شکل بالا دیده می‌شودکه قاعدهٔ مخروط دایروی‌شکل و شعاع آن، موازی با محور y است؛ یعنی: $y = r$ و همچنان ارتفاع مخروط (h) منطبق بر محور x می‌باشد. از اینجا $x = h$ می‌شود، بنابرین در رابطهٔ $y = mx$ قیمت وضع می کنیم به:

$$y = mx \quad \Rightarrow \quad r = mh$$

$$= \frac{\pi h}{3} \quad r^2$$

$$V = \pi r^2 \times \frac{h}{3}$$

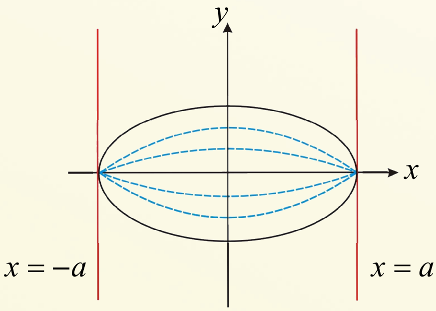
چون مساحت قاعدهٔ مخروط دایروی است و مساحت دایره πr^2 می‌باشد، داریم که:

$$V = \pi r^2 \cdot \frac{h}{3}$$

$$V(\text{حجم مخروط}) = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$$

3: حجم الپس را که از دوران مساحت بین منحنی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ و محور x، حول قطر بزرگ به وجود می‌آید، حساب کنید.

ثبوت: حجم نیم الپس را از دوران مساحت محصور شده حول قطر بزرگش به دست آورده و آن‌را دو چند می‌کنیم تا حجم کل الپس به دست آید:



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2} \Rightarrow y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2$$

$$V = \int_{-a}^{a} \pi y^2\, dx = \pi \int_{-a}^{a} [b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2]dx$$

$$= 2\pi \int_{0}^{a} [b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2]dx = 2\pi[b^2x - \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x^3}{3}]_0^a$$

$$= 2\pi[(b^2a - \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{a^3}{3}) - 0] = 2\pi[b^2a - \frac{b^2a}{3}]$$

$$= 2\pi[\frac{3b^2a - b^2a}{3}] = 2\pi[\frac{2b^2a}{3}]$$

$$V = \frac{4}{3}\pi b^2 a \Rightarrow \text{حجم الپس حول قطر بزرگ} = \frac{4}{3}\pi b^2 a$$

اگر محراق‌های بیضوی روی محور y قرار داشته باشد و بخواهیم انتیگرال آن‌را حساب کنیم، حجم حول قطر کوچک الپس به طور زیر به دست می‌آید:

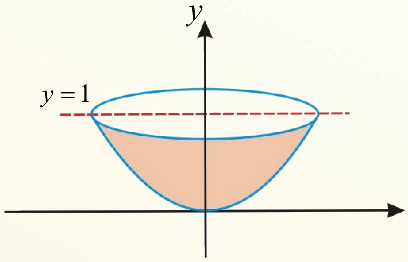
$$\text{حجم الپس حول قطر کوچک} = \frac{4}{3}\pi a^2 b$$

مثال 1: حجم جسمی را که از دوران مساحت بین منحنی تابع $y = x^2$ و خط $y = 1$ حول محور y به دست می‌آید، حساب کنید.

حل: ابتدا شکل را رسم و بعد از آن حجم آن‌را حساب می‌کنیم:

$$V = \int_a^b \pi\, x^2 dy = \pi \int_0^1 y\, dy = \frac{1}{2}\pi y^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}\pi$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi}{2}$$



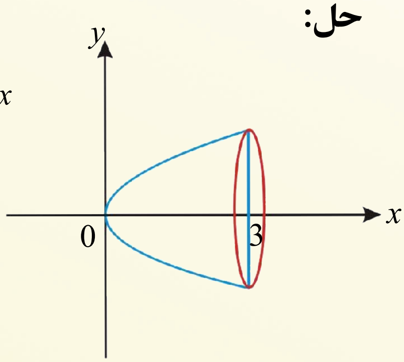
مثال 2 : حجم جسمی را که از دوران بین تابع $y = \sqrt{2x}$ و خط $x = 3$ دست می‌آید، دریابید.

حل:

$$V = \int_a^b \pi\, y^2 dx = \int_0^3 \pi[\sqrt{2x}\,]^2 dx = \pi \int_0^3 [\sqrt{2x}\,]^2 dx = \pi \int_0^3 2x\, dx$$

$$V = 2\pi \int_0^3 x\, dx = 2\pi [\frac{x^2}{2}]_0^3$$

$$V = 9\pi$$

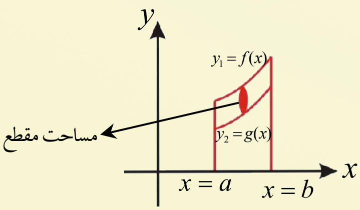


یادداشت: اگر توابع $y_1 = f(x)$ و $y_2 = g(x)$ در انتروال $[a,b]$ متمادی باشند، حجم جسمی که از دوران مساحت بین منحنی‌های $f(x)$ و $g(x)$ و دو خط $x = a$ و $x = b$ به حول محور x تشکیل می‌شود، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

ارتفاع استوانه $= \Delta x$

$A(x) =$ (مساحت مقطع استوانه) $= \pi y_1 - \pi y_2 = \pi(y_1 - y_2)$

فورمول حجم استوانه‌یی که گراف تابع $f(x)$ بالاتر از گراف تابع $g(x)$ باشد:



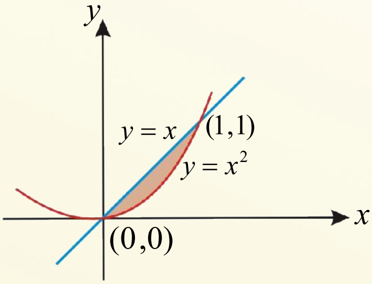
$$V = \int_a^b \pi(y_1^2 - y_2^2)\, dx = \pi \int_a^b (y_1^2 - y_2^2)\, dx$$

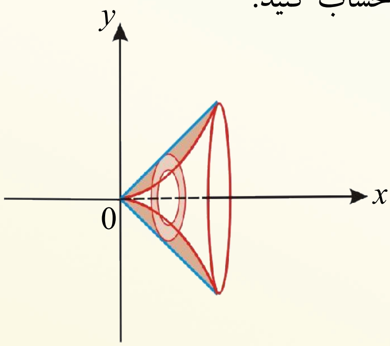
فورمول حجم استوانه‌یی که گراف تابع $g(x)$ بالاتر از گراف تابع $f(x)$ باشد، چنین است:

$$V=\int_a^b \pi(y_2^2-y_1^2)\,dx=\pi\int_a^b (y_2^2-y_1^2)\,dx$$

مثال: حجم جسمی را که از دوران مساحت بین منحنی $y=x^2$ و خط $y=x$ حول محور x به وجود می‌آید حساب کنید.

حل:





$$\left.\begin{matrix} y_1=x^2=f(x) \\ y_2=x=g(x) \end{matrix}\right\} \Rightarrow y_2>y_1\ ,\ \ g(x)>f(x)$$

$$=\int_a^b \pi(y_2^2-y_1^2)\,dx=\int_0^1 \pi(x^2-(x^2)^2)dx$$

$$=\pi\int_0^1 (x^2-x^4)\,dx=\pi[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}]_0^1$$

$$=\pi[(\frac{1}{3}-0)-(\frac{1}{5}-0)]=\pi[\frac{1}{3}-\frac{1}{5}]$$

$$V=\pi[\frac{5-3}{15}]=\pi[\frac{2}{15}]=\frac{2\pi}{15}$$

تمرین

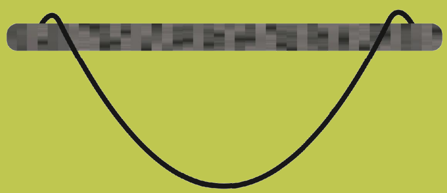
1- حجم جسمی را که از دوران مساحت بین منحنی تابع $y=\sin x$ و دو خط $x=0$ و $x=\pi$ به حول محور x به وجود می‌آید، حساب کنید.

2- حجم جسمی را که از دوران مساحت بین منحنی $y=x^3$ و خط $y=8$ و $x=0$ حول محور y به دست می‌آید، حساب کنید.

محاسبهٔ طول قوس

Accounting the Length of Arc

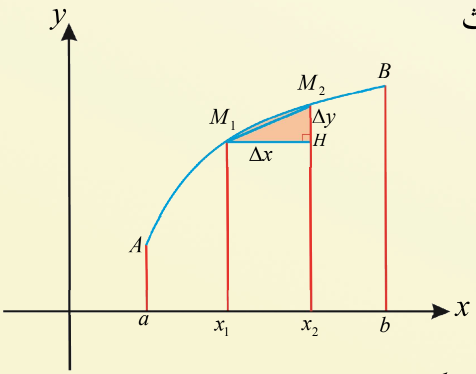
چطور می‌توانیم طول ریسمان مقابل را دریافت کنیم؟



فعالیت

- بالای محور مختصات قایم منحنی تابع $y = f(x)$ را بین انترول محصور شدهٔ $[a,b]$ در نظر گرفته و آن‌را $\overset{\frown}{AB}$ بنامید، طوری که تابع در انترول مذکور متمادی و مشتق‌پذیر باشد.
- انترول $[a,b]$ را به سه حصهٔ مساوی تقسیم و طول قوس مقابل x_1 و x_2 را به M_1 و M_2 نشان دهید.
- از نقطهٔ M_1 یک قطعه خط به نقطهٔ M_2 و یک خط دیگر به ضلع مقابل آن رسم کرده و نقطهٔ تقاطع هر دو قطعه خط را H بنامید.
- فاصله قطعه خط M_1H را Δx و M_2H را به Δy نامگذاری و طول قوسی را که در مقابل وتر مثلث قایم الزاویهٔ M_1HM_2 قرار دارد، با استفاده از قضیهٔ فیثاغورث حساب کنید.

از نتیجهٔ فعالیت فوق می‌توان طول قوس مقابل وتر مثلث M_1HM_2 را چنین به اثبات رسانید:



ثبوت: با استفاده از مثلث قایم الزاویه M_1HM_2 داریم که:

$$(M_1M_2)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

$$M_1M_2 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

نظر به تعریف مشتق می‌دانیم:

$$f'(t)=\frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad , \qquad g'(t)=\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\Delta x = f'(t)\cdot \Delta t \qquad , \qquad \Delta y = g'(t)\cdot \Delta t$$

$$M_1M_2=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{[f'(t)\cdot \Delta t]^2+[g'(t)\cdot \Delta t]^2}$$

$$M_1M_2=\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\cdot \Delta t$$

از مجموع ریمان داریم که:

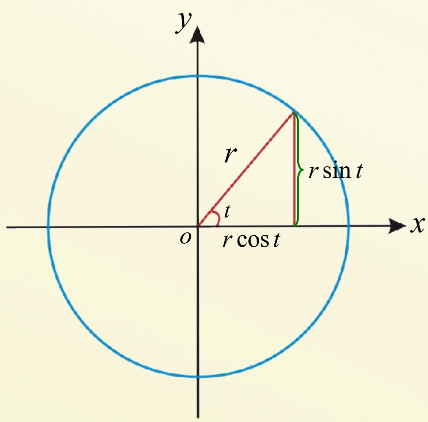
$$L=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\cdot \Delta t$$

$$L=\int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\, dt$$

مثال: محیط دایره‌یی به معادلهٔ $x^2+y^2=r^2$ را محاسبه کنید.

حل: چون معادله پارامتری دایره به صورت $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$ است؛

اگر $0\le t\le \pi$ باشد، پس نصف محیط دایره را حساب می کنیم:



$$P=\int_0^{\pi}\sqrt{x'^2+y'^2}\, dt$$

$$x'=-r\sin t \quad , \quad y'=r\cos t$$

$$P=\int_0^{\pi}\sqrt{(-r\sin t)^2+(r\cos t)^2}\, dt$$

$$P=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2\sin^2 t+r^2\cos^2 t}\, dt$$

$$P=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2(\sin^2 t+\cos^2 t)}\, dt=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2}\, dt$$

$P=[rt]_0^{\pi}=(r\cdot\pi-r\cdot 0)=\pi r$ محیط نصف دایره

محیط کُل دایره $=2\pi r$

یادداشت:

1- اگر معادلهٔ منحنی $y=f(x)$ در انتروال $a\le x\le b$ داده شده باشد، با توجه به پارامتر مانند x طول قوس منحنی را چنین محاسبه می‌کنیم:

$$L=\int_a^b \sqrt{1+f'^{\,2}(x)}\;dx$$

مثال: طول قوس منحنی $y=f(x)=x^{\frac{3}{2}}$ را در انتروال $0\le x\le 4$ حساب کنید.

$f(x)=x^{\frac{3}{2}}$ و $f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

حل :

$$L=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\;dx=\int_0^4 \sqrt{1+(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}})^2}\cdot dx$$

$$=\int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\;\;dx=\int_0^4 \sqrt{u}\cdot\frac{4}{9}du=\frac{4}{9}\int_0^4 u^{\frac{1}{2}}\,du \qquad u=1+\frac{9}{4}x$$

$$=\frac{4}{9}[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}]_0^4=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}[u^{\frac{3}{2}}]_0^4=\frac{8}{27}[\sqrt{u^3}\,]_0^4 \qquad du=\frac{9}{4}dx \qquad dx=\frac{4}{9}du$$

$$=\frac{8}{27}[\sqrt{(1+\frac{9}{4}x)^3}\,]_0^4=\frac{8}{27}[\sqrt{(1+\frac{9}{4}\cdot 4)^3}-1]=\frac{8}{27}(\sqrt{10^3}-1)$$

$$L=\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$$

2- اگر معادلهٔ منحنی $x=f(y)$ در انتروال $a\le y\le b$ داده شده باشد، با توجه به پارامتری مانند y طول قوس منحنی را چنین محاسبه می‌کنیم:

$$L=\int_a^b \sqrt{f'^2(y)+1}\;\;dy$$

مثال: طول قوس منحنی $x=f(y)=y^{\frac{3}{2}}$ را در انتروال $1\le y\le 4$ محاسبه کنید.

حل :

$$f(y)=y^{\frac{3}{2}} \quad , \quad f'(y)=\frac{3}{2}\cdot y^{\frac{1}{2}}$$

$$L=\int_a^b \sqrt{f'^2(y)+1}\,dy=\int_1^4 \sqrt{(\frac{3}{2}\cdot y^{\frac{1}{2}})^2+1}\,dy$$

$$=\int_1^4 \sqrt{\frac{9}{4}y+1}\,dy=\int_1^4 \sqrt{u}\cdot\frac{4}{9}du \qquad u=\frac{9}{4}y+1$$

$$=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}[u^{\frac{3}{2}}]_1^4=\frac{8}{27}[\sqrt{(\frac{9}{4}y+1)^3}]_1^4 \qquad du=\frac{9}{4}dy$$

$$=\frac{8}{27}[\sqrt{(10)^3}-\sqrt{(\frac{9}{4}+1)^3}] \qquad dy=\frac{4}{9}du$$

$$=\frac{8}{27}[\sqrt{1000}-\sqrt{(\frac{13}{4})^3}]=\frac{8}{27}[10\sqrt{10}-\sqrt{\frac{2197}{64}}]$$

تمرین

1- طول قوس منحنی $x=t^2$ و $y=t^3$ را در انتروال $1\le x\le 2$ دریابید.

2- طول قوس منحنی $f(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$ را در انتروال $0\le x\le 1$ حساب کنید.

محاسبهٔ مساحت محصور شده توسط یک منحنی

- انتیگرال $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$ مساحت یک سطح را نمایش می‌دهد که توسط منحنی تابع $y=f(x)$ و محور x و خطوط $x=a$، $x=b$ محصور شده است.
- اگر تابع $f(x)$ در انتروال بستهٔ $[a,b]$ متمادی و مثبت باشد؛ یعنی $y=f(x)\geq 0$ در این حالت $f(x)$ همیشه در قسمت بالایی محور x قرار دارد و اگر $y=f(x)\leq 0$ باشد در این حالت $f(x)$ در قسمت پایینی محور x قرار دارد و انتیگرال آن منفی است.

محاسبهٔ مساحت محصور شده توسط دو منحنی

- اگر گراف تابع $f(x)$ بالاتر از گراف تابع $g(x)$ قرار داشته باشد داریم که:

$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx=\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx$$

- اگر گراف تابع $g(x)$ بالاتر ازگراف تابع $f(x)$ قرار داشته باشد داریم که:

$$A=\int_a^b [g(x)-f(x)]dx=\int_a^b g(x)dx-\int_a^b f(x)dx$$

محاسبهٔ حجم اجسام دورانی:

- هر گاه مساحت منحنی تابع متمادی $y=f(x)$ توسط خطوط $x=a$ و $x=b$ محصور شده باشد؛ جسمی که از دوران مساحت بین منحنی تابع فوق حول محور x به وجود می‌آید، به گونهٔ تقریبی استوانه‌یی شکل می‌باشد. که ارتفاع آن $\Delta x=b-a$ است و سطح این استوانه توسط سطوح دایروی شکل محصور گردیده که این سطوح را مقطع گویند ما می‌دانیم که مساحت دایره نظر به محور x، $A(x)=\pi r^2$ و شعاع این مقطع موازی به محور y است؛ بنابرین $y=r$ می‌شود و فورمول حجم این جسم نظر به مجموع ریمان به طور زیر به دست می‌آید:

$$v=\lim_{n\to\infty} V_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} A(x)\Delta x=\int_a^b \pi r^2\,dx=\int_a^b \pi y^2\,dx=\pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx$$

- اگر مساحت منحنی تابع $x=f(y)$ توسط خطوط $y=c$ و $y=d$ محصور شده باشد؛ مساحت مقطع چنین استوانه‌یی نظر به محور y، $A(y)=\pi r^2$ و ارتفاع آن $\Delta y=d-c$ و شعاع آن $x=r$ می‌باشد.

حجمی که از دوران این مساحت به دست می‌آید، چنین است:

$$v=\lim_{n\to\infty} V_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} A(y)\Delta y=\int_a^b \pi r^2\,dy=\int_a^b \pi x^2\,dy=\pi\int_a^b [f(y)]^2\,dy$$

محاسبهٔ طول قوس:

فورمول محاسبهٔ طول قوس: $L=\int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\,dt$

1) $L=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$

2) $L=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(y)}\,dy$

تمرینات عمومی فصل ششم

1- مساحت سطح محصور بین منحنی $y^2-x-5=0$ و محور y را محاسبه کنید.

2- مساحت سطحی را که بین منحنی $y=\sin x$ و محور x در انتروال $[0,2\pi]$ محصور شده دریافت کنید.

3- مساحت سطح محصور شده توسط منحنی‌های $y=x^2-2x$ و $y=6x-x^2$ را حساب کنید.

4- مساحت سطح محصور شده توسط منحنی با معادلهٔ $y=-x^2+4x-3$ و محور x را دریابید.

5- مساحت سطح محصور شده توسط منحنی‌های $y=x^3-6x^2+8x$ و $y=x^2-4x$ را حساب کنید.

6- حجم جسمی را که از دوران سطح محصور شده توسط منحنی تابع $y=\sin x-\cos x$ در انتروال $x=0$ و $x=\frac{\pi}{2}$ حول محور x به وجود می‌آید، حساب کنید.

7- حجم جسمی را که از دوران منحنی تابع $y=\frac{1}{4}x^2+2$ و محور x در انتروال $[0,4]$ به وجود می‌آید، دریابید.

8- حجم جسمی را که از دوران سطح محصور شده توسط منحنی تابع $y=x^2$ و دایرهٔ $x^2+y^2=2$ حول محور x به وجود می‌آید، حساب کنید.

9- حجم جسمی را که از دوران خط $y=\frac{1}{2}x+1$ و محور x در انتروال $[2,6]$ به دست می‌آید محاسبه کنید.

10- طول قوس منحنی تابع $y=-x+4$ را در انتروال $-2\le x\le 2$ محاسبه کنید.

11- طول قوس تابع $y=\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}$ را در انتروال $2\le x\le 5$ حساب کنید.

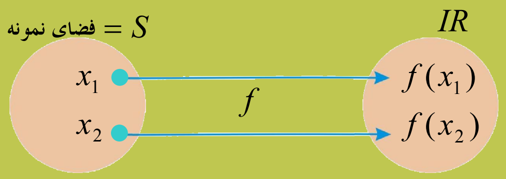
فصل هفتم

احصائیه

ما همه افغانیم.

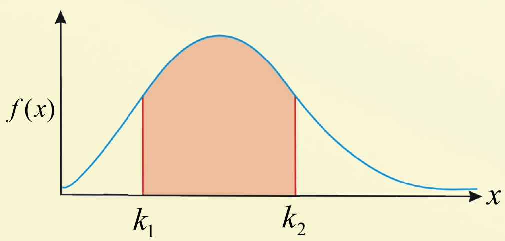
تابع توزیع احتمال

کلمه‌هایی مانند تجربهٔ تـصادفی، فـضای نمونه و متحول تصادفی چه چیـزی را در ذهن شما زنده می‌کند؟



فعالیت

- متحول تصادفی که در احصائیه و احتمالات از آن استفاده می‌کنید، چه تفاوتی با متحـولی کـه در الجبر آن را خوانده اید، دارد؟
- اگر $x_1, x_2, ..., x_n$ عناصـر یـک سـت باشـند و تـابع $P(X = x_i) = f(x_i)$ را داشـته باشـیم، جوره‌های مرتبی را که توسط تابع فوق به دست می‌آید، بنویسید.
- با توجه به شکل زیر، مساحت محصور شده بین دو مقدار k_1 و k_2 و تحت منحنی $f(x)$ را به صورت انتیگرال ارائه کنید.



• بـــا در نظرداشـــت جـــدول زیـــر مجموعـــهٔ $x_i f(x_i)$ $[E(x=x_i)]=\sum_{i=1}^{2}$, $[x_i - E(x_i)]^2$ و $[x_i - E(x_i)]^2 f(x_i)$ را به دست آرید.

x_i	0	1
$f(x_i)$	0.5	0.5

از فعالیت فوق به نتایج زیر دست می‌یابیم که:

- تابع توزیع احتمال که در احصائیه و احتمالات مورد بحث قرار می‌گیرد، عبارت از تابعی است که ناحیهٔ تعریف آن فضای نمونه و ناحیهٔ قیمت‌های آن اعداد حقیقی است.

- اگـــر $P(X = x_i) = f(x_i)$ داشـــته باشـــیم در ایـــن صـــورت جـــوره‌هـــای مرتـــب $[x_1 , f(x_1)],[x_2 , f(x_2)], \dots ,[x_n , f(x_n)]$ را تابع احتمال مجزا(گسسته) می‌گویند.

- تابع احتمال پیوسته و تجمعی را می‌توان به شکل $F(x) = P(X \le x)$ ارائه نمود.

– اگر $f(x)$ تابع احتمال و x متحول تصادفی باشد، در این صورت احتمال این‌که x بین k_1 و k_2 قرار گیرد برابر است با:

$$P(k_1 \le x \le k_2) = \int_{k_1}^{k_2} f(x)\,dx$$

– اگر x متحول تصادفی پیوسته و $k_1 < k_2$ باشد در این صورت:

$$P(k_1 \le x \le k_2) = F(k_2) - F(k_1)$$

– اگر x متحول تصادفی گسسته باشد، در این صورت اوسط (*Expected Value*) یک متحول تصادفی x که به $E(x)$ نشان داده می‌شود برابر است با:

$$E(x) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \dots\dots\dots + x_n f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

$E(x)$ اوسط x نامیده می‌شود که آن‌را با $\bar{x}$ نمایش می‌دهیم و همچنان اگر x متحول تصادفی گسسته باشد، در این صورت وریانس x که به شکل S^2 نمایش داده می‌شود مساوی است با:

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[x_i - E(x_i)\right]^2 f(x_i)$$

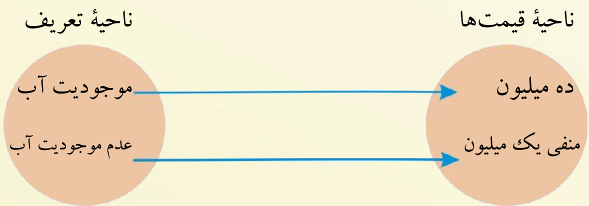
مثال: یک شرکت خصوصی می‌خواهد یک چاه آب را در روی یک تپه حفر نماید، هزینهٔ این کار یک میلیون افغانی تمام می‌شود. اگر چاه حفر شده آب بدهد، صاحب شرکت ده میلیون افغانی مزد می‌گیرد اما در غیر این صورت یک میلیون افغانی بابت حفر چاه ضرر خواهد کرد.

الف: این موضوع را به صورت یک تابع ارائه کنید.

ب: اگر احتمال این‌که چاه حفر شده آب بدهد 0.2 و احتمال نرسیدن به آب 0.8 باشد در این صورت تابع احتمال، اوسط (*Expected Value*)، وریانس و انحراف معیار متحول تصادفی x را دریافت کنید.

حل:

الف: دیاگرام زیر نشان دهندهٔ توزیع تابع احتمال است:



ب: چگونه‌گی محاسبهٔ تابع احتمال، اوسط متحول تصادفی x، وریانس و انحراف معیار متحول تصادفی در جدول زیر نشان داده شده است:

انحراف معیار	واریانس	انحراف مربعات متحول تصادفی از اوسط خود	اوسط	تابع احتمال	متحول تصادفی
S	$S^2=[x_i-E(x)]^2 f(x_i)$	$[x_i-E(x)]^2$	$E(x)=\sum x_i f(x_i)$	$f(x_i)$	x_i
4.4	$4.84\cdot 0.8=3.872$	$(-1-1.2)^2=4.84$	$-1\cdot 0.8=-0.8$	0.8	-1
	$77.44\cdot 0.2=15.488$	$(10-1.2)^2=77.44$	$10\cdot 0.2=2$	0.2	10
	$\sum S^2=19.360$		1.2	0.1	

تمرین

1- ماشینی که تولیدکنندهٔ پیچ است، یک درصد از پیچ‌های تولید شده اش ناقص می‌باشد. احتمال آنکه در یک جعبهٔ 200 تایی از این نوع پیچ، هیچ پیچ ناقصی وجود نداشته باشد، چقدر است؟

2- یک مغازه 1000 بوتل آب معدنی استحصال نموده است. احتمال آن‌که در صورت انتقال، بوتل‌های شکسته ظاهر شود مساوی به 0.003 است. این احتمال را در صورتی دریافت کنید که مغازه بوتل‌های شکسته را طور زیر به دست آورد:

a- مساوی 2

b- کوچک‌تر از 2

c- بزرگ‌تر از 2

حد اقل یکی از آن‌ها شکسته باشد.

آزمایش برنولی و توزیع دو جمله‌یی

یک شرکت‌کننده در امتحان کانکور از جملهٔ 160 سوال، 100 سوال آن‌را حل می‌کند. به نظر شما این شرکت‌کننده کامیاب می‌شود یا بی نتیجه می‌ماند؟

توزیع احتمال دو جمله‌یی، یک توزیع گسسته است که برای توصیف حوادث مختلف به کار می‌رود، زیرا بیشتر اتفاقاتی که در دنیا رخ می‌دهد، دو حالت دارد.

فعالیت

از شرایط آزمایش حوادث زیر چه نوع نتایجی را می‌توان به دست آورد؟

- چند مرتبه دوسکه انداخته شود تا همزمان هر دو سکه شیر بیاید؟
- چند مرتبه دو تاس انداخته شود که مجموع شماره‌های آنها کوچکتر از 7 شود؟
- چند بار گرفتن یک مهره از جعبه‌یی که حاوی مهره‌های سیاه و سفید است، صورت گیرد تا مهرهٔ گرفته شده سفید باشد؟ (البته مهرهٔ گرفته شده هربار به جعبه انداخته شود.)

– اگر در انتخاب m کامیابی از n آزمایش ($m < n$) ترتیب آنها مهم نباشد، این انتخاب را به نام چه یاد می‌کنند؟ فورمول آن را بنویسید.

– اگر احتمال m اشکال کامیابی(موفقیت) از n آزمایش را به P، و احتمال $n-m$ اشکال ناکامی (شکست) از این آزمایش را به q نشان دهیم، پس احتمال m کامیابی در هر یک از این n اشکال آزمایش چند خواهد بود؟

– شاگردی با 5 امتحان 4 جوابه روبه‌رو می‌شود. او به طور تصادفی به سوالات جواب می‌دهد. فرض کنید موفقیت(جواب درست) با T و عدم موفقیت(جواب نادرست) با حرف F نمایش داده شود. در این صورت، احتمال هر یک جواب درست و نادرست چند خواهد بود؟

از فعالیت بالا فهمیده می‌شود که آزمایش برنولی یک آزمایش تصادفی است که نتیجهٔ آن را می‌توان به دو حالت کامیابی و ناکامی دسته بندی کرد.

توزیع برنولی را می‌توان به صورت $P(X=m)=P^m(1-P)^{1-m}=P^m\cdot q^{1-m}$ نشان داد. درحالی‌که P احتمال کامیابی و $q=1-P$ احتمال عدم کامیابی می‌باشد، هرگاه یک آزمایش را n دفعه تکرار کنیم، یک ترادف به دست می‌آید طوری که اگر احتمال کامیابی هر آزمایش P و احتمال ناکامی آن q باشد، احتمال m کامیابی در این n آزمایش عبارت است از:

$$P(X\le m)=\binom{n}{m}P^m q^{n-m} \qquad 0\le m\le n$$

رابطهٔ فوق را می‌توان به صورت $B(m,n,p)$ نیز ارائه کرد.

با در نظرداشت فورمول فوق، می‌توان اوسط توزیع دوجمله‌یی را به صورت $\overline{x}=np$ و انحراف معیاری این توزیع را به صورت $S=\sqrt{n\,p\,q}$ ارائه نمود.

مثال 1: احتمال شفا یافتن یک مریض از مرض شکر 0.4 است در صورتی که 15 نفر به این مرض مصاب باشند، چقدر احتمال دارد که صرف 5 نفر شفا یابند و همچنان دریابید احتمال اینکه 3 الی 4 نفر از آن‌ها شفا یابد.

حل: چون $n=15\,,\; m=5\,,\; P=0.4,\; q=1-P=0.6$ بنابر این:

$$P(m=5)=\binom{n}{m}P^m\cdot q^{n-m}=\binom{15}{5}(0.4)^5(0.6)^{10}$$
$$=\frac{15!}{5!(15-5)!}\cdot 0.01024\cdot 0.00604661760=\frac{360360}{120}\cdot 0.00006191$$
$$=\frac{22.312554264}{120}=0.1859$$

$$P(3\le m\le 4)=\sum_{i=3}^{4}\binom{15}{i}(0.4)^i(0.6)^{15-i}=\binom{15}{3}(0.4)^3(0.6)^{15-3}+\binom{15}{4}(0.4)^4(0.6)^{15-4}$$
$$=\frac{15!}{3!(15-3)!}(0.064)(0.0021767823)+\frac{15!}{4!(15-4)!}(0.0256)(0.0036279706)$$
$$=\frac{2730}{6}(0.0001393141)+\frac{3270}{24}(0.000092876)$$
$$=\frac{0.380327493}{6}+\frac{3.04261776}{24}=0.0633879155+0.12677574$$
$$P(3\le m\le 4)=0.19$$

تمرین

1- در یک قریه 200 خانواده سکونت دارند که هر کدام دارای 4 طفل می‌باشند، دریافت کنید احتمال این که:

- حداقل یک پسر داشته باشند.
- تنها دو پسر داشته باشند.
- یک یا دو دختر داشته باشند.

توزیع احتمال پواسن

اگر در توزیع دوجمله‌یی قیمت P به طرف صفر و قیمت n به طرف لایتناهی تقرب کند توزیع دو جمله-یی مساوی به چی می‌شود؟

1) $b(x,n,p)=\binom{x}{n}p^{x}q^{n-x}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} b(x,n,p)=\dfrac{\lambda^{x}\cdot e^{-\lambda}}{x!}$

3) $P(x,\lambda)=\dfrac{\lambda^{x}\cdot e^{-\lambda}}{x!}$

فعالیت

اگر $n=5$, $p=0.1$ و $m=2$ باشد، قیمت‌های $P(X=m)=\dfrac{e^{-\lambda}\,\lambda^{m}}{m!}$ را در حالی که $\lambda=\mathrm{np}$ و قیمت‌های $P(X=m)=\binom{n}{m}P^{m}q^{n-m}$ باشد، محاسبه و قیمت‌های توابع فوق را مقایسه کنید و بگویید طرز محاسبهٔ کدام یک از فورمول‌های فوق ساده‌تر است؟

فورمول پواسن می‌تواند برای محاسبهٔ تقریبی m اشکال کامیابی از n آزمایش، وقتی که n بزرگ و احتمال کامیابی P کوچک باشد مورد استفاده قرار گیرد.

فورمول پواسن برای محاسبهٔ تقریبی احتمال m اشکال در n آزمایش عبارت است از:

$$P(X=m)=\frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{m}}{m!}$$

که در آن $\lambda=np$ و $e=2.71828$ می‌باشد.

به خاطر داشته باشید که هم اوسط و هم وریانس توزیع پواسن برابر λ است.

مثال: به تعداد 200 مسافر تکت یک هواپیما را گرفته اند. اگر احتمال نیامدن مسافری که تکت گرفته، طبق تجارب گذشته 0.01 باشد احتمال این که 3 مسافر نیایند چقدر است؟

حل: در این مسأله «نیامدن» کامیابی است و همچنان مشاهده می‌شود که $n = 200$ به اندازۀ کافی بزرگ و $p = 0.01$ ؛ یعنی احتمال کامیابی به اندازۀ کافی کوچک است؛ بنابرین داریم:

$$P(X = m) = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{m}}{m!} \qquad \lambda = n\,p = 200 \cdot 0.01 = 2$$

$$P(3) = \frac{(2.71828)^{-2} \cdot 2^{3}}{3!} = \frac{\frac{1}{(2.71828)^{2}} \cdot 8}{6} = \frac{\frac{1}{7.3890461584} \cdot 8}{6}$$

$$= \frac{0.13533 \cdot 8}{6} = \frac{1.08268}{6} = 0.1804$$

حال اگر این احتمال را توسط فورمول دو جمله‌یی محاسبه نماییم، داریم:

$$P(X = m) = \binom{n}{m} P^{m}\; q^{n-m}$$

$$\left.\begin{array}{l} n = 200 \\ p = 0.01 \end{array}\right\} \Rightarrow q = 0.99$$

$$P(3) = P(X = 3) = \binom{200}{3} (0.01)^{3} (0.099)^{200-3}$$

$$= \frac{200!}{3! \cdot 197!} (0.01)^{3} (0.099)^{197} = 0.1814$$

طوری که دیده می‌شود، دو جواب به گونۀ تقریبی معادل یکدیگر اند. واضح است که محاسبه احتمال به وسیلۀ فورمول پواسن ساده‌تراست.

یادداشت: فورمول پواسن را برای محاسبهٔ احتمال تعداد مراجعات در یک زمان مشخص می‌توان به صورت زیر ارائه کرد:

$$P(X=m)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}$$

در این فورمول t نسبت زمان عنوان شده به کل زمانی که اوسط برای آن داده شده است. m تعداد مراجعه در t واحد زمان است.

λ اوسط تعداد مراجعه‌ها در واحد زمان است.

مثال: اگر تعداد مراجعین یک بانک به طور متوسط در یک ساعت 60 نفر باشد، احتمال این که چهار نفر در سه دقیقهٔ اول به بانک مراجعه کنند، چقدر است؟

حل:

$$\lambda=60 \quad , \quad t=\frac{3}{60}=\frac{1}{20}$$

$$m=4 \quad , \quad \lambda t=60\cdot\frac{1}{20}=3$$

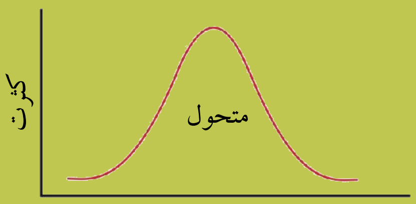
$$P(m=4)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}=\frac{e^{-3}(3)^4}{4!}=\frac{(2.71828)^{-3}(3)^4}{4!}=\frac{\frac{1}{(2.71828)^3}\cdot 81}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

$$=\frac{\frac{1}{20.0854}\cdot 81}{24}=\frac{4.03278}{24}=0.168032$$

توزیع نورمال

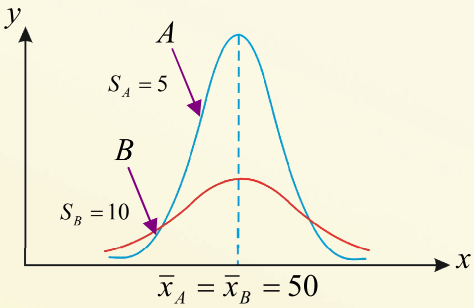
- می‌دانیم که شکل منحنی نورمال متناظر و شبیه یک زنگوله است.

_ در یک منحنی نورمال شاخص‌های مرکزی و پراکنده‌گی (اوسط و انحراف معیاری) چه نوع موقعیتی را گرفته می‌توانند؟

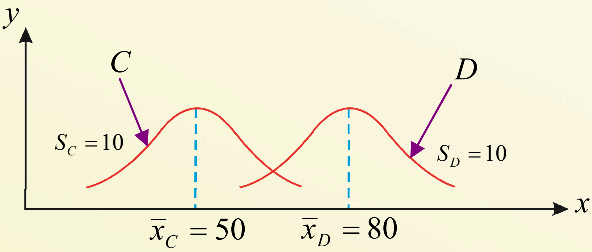


توزیع‌های نورمال مختلف دارای اوسط و انحراف معیاری مختلف اند.

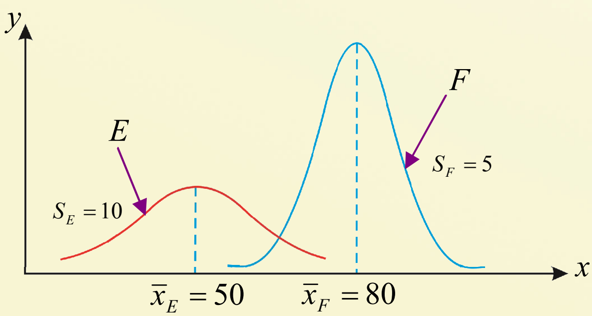
چند توزیع نورمال با اوسط و انحراف معیاری مختلف مانند اشکال زیر داده شده است:



شکل الف



شکل ب



شکل ج

اجرای فعالیت زیر را با استفاده از اشکال فوق به طور شفاهی بیان کنید:

- در شکل الف توزیع متحول تصادفی A و B دارای چه نوع اوسط و انحراف معیاری می‌باشند؟
- در شکل ب توزیع C و D دارای چه نوع انحراف معیاری و اوسط هستند؟
- در شکل ج، توزیع‌های E و F دارای کدام نوع اوسط و انحراف معیاری می‌باشند؟

از انجام فعالیت فوق نتیجهٔ زیر به دست می‌آید:

منحنی‌های توزیع نورمال می‌توانند به چهار طریق با یکدیگر تفاوت داشته باشند. شکل ریاضی معادلهٔ توزیع نورمال که نشان‌دهندهٔ تابع توزیع احتمال آن $f(x)$ است، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$f(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\bar{x}}{s})^2}$$

و یا

$$f(x) = N(x, \bar{x}, s)$$

در حالی‌که e عدد ثابت 2.71828 و π عدد ثابت 3.14189 است، $\bar{x}$ اوسط، s انحراف معیار و x مقادیر متحول تصادفی پیوسته و $f(x)$ ارتفاع منحنی را نشان می‌دهد.

توزیع نورمال از جمله توزیع‌های پیوسته است. اختلاف در اندازه‌گیری‌ها را می‌توان توسط توزیع نورمال به خوبی تقرب نمود.

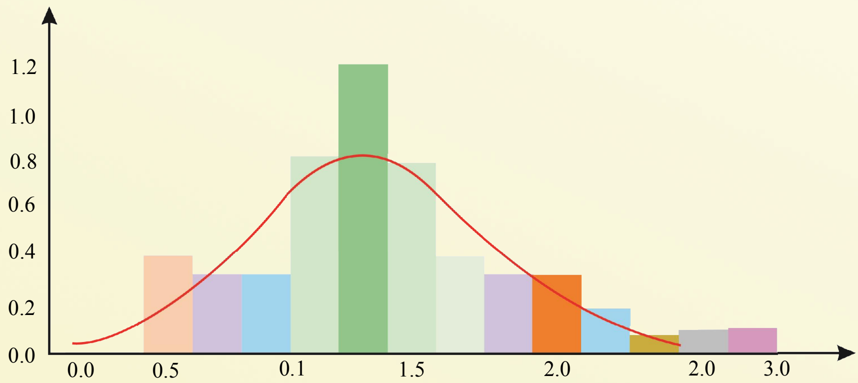
مثال(آلوده‌گی موترها):

ماشین موترها به هنگام سوزاندن تیل، مقداری آلوده‌گی از خود انتشار می‌دهند. آلوده‌گی‌های خارج شده از ماشین 46 موتر، توسط شخصی به‌نام لورنزن در سال 1980 بررسی شده است.

یک دسته از آلوده‌گی‌ها شامل اکسایدهای نایتروجن است.

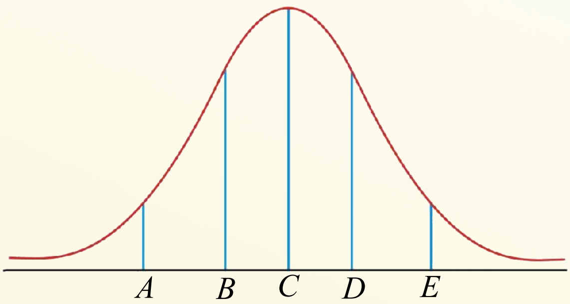
گراف مستطیلی زیر، میزان اکساید نایتروجن(برحسب گرام فی میل) این 46 موتر را همراه با تابع توزیع احتمال نورمال با اوسط و وریانس به دست آمده از نمونه‌یی که به وسیلهٔ شخص مذکور گزارش شده است، نشان می‌دهد. مساحت ستون‌های این گراف مستطیلی متناسب است با تعداد 46 نمونه اندازه‌گیری‌یی که بین نقاط افقی این ستون‌ها قرار گرفته اند.

به طور مثال، ستون چهارم(که از 1 تا 1.2 روی محور افقی قرار دارد) دارای مساحت $0.870 \cdot 0.2 = 0.174$ است که برابر $\frac{4}{46}$ می‌باشد. زیرا 8 دیتا بین 1 تا 1.2 قرار دارند.



تمرین

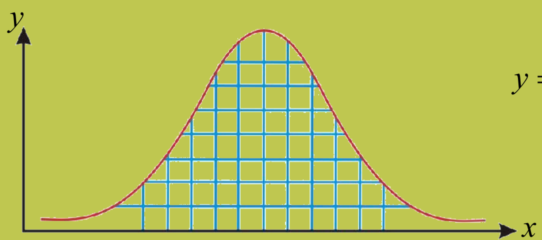
شکل زیر را در نظر بگیرید. موقعیت نقاط A, B, C, D و E را از جنس اوسط و انحراف معیار ارائه کنید؟



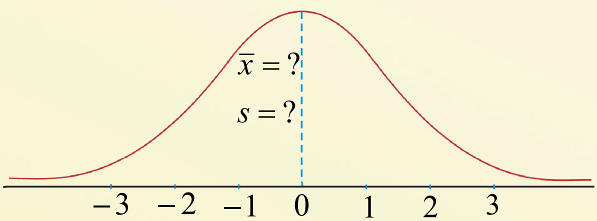
مساحت تحت منحنی توزیع نورمال و استاندارد کردن آن

شکل مقابل را در نظر بگیرید:

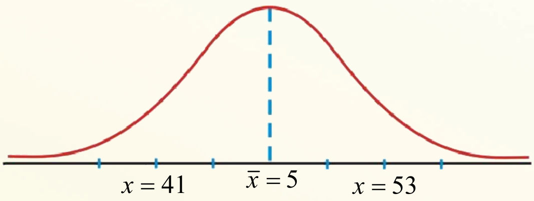
برای محاسبهٔ مساحت تحت منحنی $y = f(x)$ چه نوع روشی را پیشنهاد می‌کنید؟



- اگر متحول تصادفی پیوستهٔ x دارای توزیع احتمال نورمال با اوسط $\overline{x}$ و انحراف معیاری s باشد، احتمال اینکه این متحول تصادفی کمیت بین x_1 و x_2 را اختیار کند، به شکل انتیگرال بنویسید.
- آیا محاسبهٔ انتیگرال شکل ریاضی توزیع احتمال نورمال کار ساده‌یی است؟
- هر گاه متحول تصادفی نورمال x را به صورت $z = \dfrac{x - \overline{x}}{s}$ بنویسیم، تابع توزیع احتمال $f(x)$ مساوی با چیست؟
- گفته می‌توانید که اوسط و انحراف معیاری شکل زیر مساوی با کدام اعداد است؟



• شکل زیر به قیمت‌های $x=41$ و $x=53$ به صورت نورمال با اوسط $\bar{x}=50$ و انحراف معیار $s=5$ نشان داده شده است، قیمت‌های $z=\dfrac{x-\bar{x}}{s}$ را به دست آورید؟

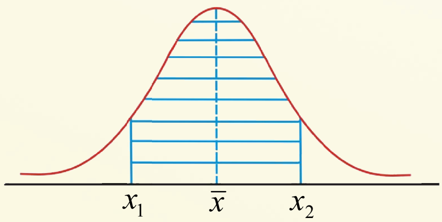


از فعالیت بالا به این نتیجه می‌رسیم که:

برای محاسبهٔ احتمال این‌که متحول تصادفی پیوستهٔ x کمیت بین x_1 و x_2 را اختیار کند با این قاعده باید از تابع توزیع احتمال x انتیگرال گرفت و سطح زیر منحنی را در فاصلهٔ x_1 تا x_2 به صورت زیر محاسبه کرد:

$$f(x_1<x<x_2)=\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx=\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{s\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\bar{x}}{s})^2}$$

$$=\int_{x_1}^{x_2} N(x,\bar{x},s)dx$$



متاسفانه محاسبهٔ توزیع احتمال نورمال کار ساده‌یی نیست و برای محاسبهٔ سطح زیر منحنی توزیع‌های نورمال، ضرورت به تهیهٔ یک جدول طولانی است که به طور عملی این کار مشکل می‌باشد. اما خوشبختانه می‌توان مشکل تهیهٔ جدول را به وسیلهٔ معیاری ساختن دیتای احصائیوی حل کرد.

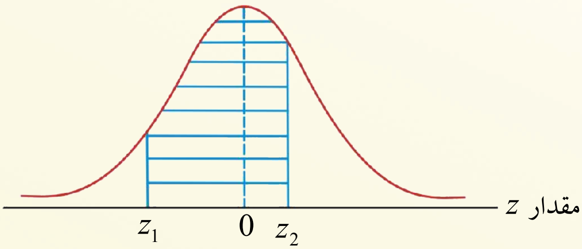
بدین معنی که می‌توان قیمت‌های مربوط به متحول تصادفی x را که دارای توزیع نورمال است، توسط رابطهٔ زیر معیاری نمود.

$$z=\frac{x-\bar{x}}{s}$$

در اینجا z را به‌نام متحول معیاری نورمال و منحنی را به‌نام منحنی نورمال معیاری شده یا منحنی احتمال نورمال یاد می‌کنند.

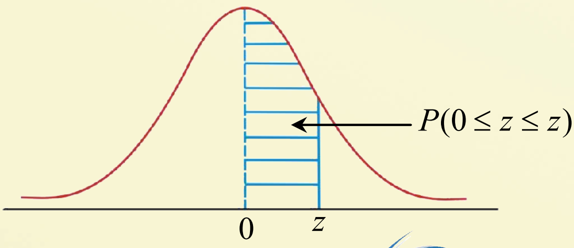
به خاطر داشته باشید که متحول معیاری شدهٔ z همیشه دارای اوسط صفر و انحراف معیار 1 می‌باشد. همچنان مساحت بین منحنی نورمال و محور افقی، برابر با واحد انتخاب شده می‌باشد. مساحت زیر قسمتی از یک منحنی احتمال نورمال با احتمال تناسب مستقیم داشته و می‌توان آن‌را با تعویض $z = \dfrac{x-\bar{x}}{s}$ به صورت زیر نشان داد:

$$f(z_1 < z < z_2) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{-z^2}{2}}\, dz = \int_{z_1}^{z_2} N(z,0,1)\, dz$$

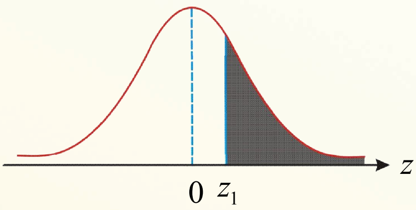


مساحت تحت منحنی متحول x که بین $x = x_1$ و $x = x_2$ قرار دارد، مساوی است با مساحت منحنی متحول z که بین $z = z_1$ و $z = z_2$ محصور می‌باشد. در نتیجه با داشتن جدول توزیع نورمال معیاری، احتمال هر توزیع نورمال را با هر قیمت ممکنهٔ متحول تصادفی آن به دست آورده می‌توانیم.

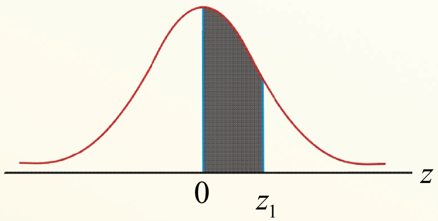
نحوهٔ استفاده از جدول احتمال توزیع نورمال معیاری را می‌توان به طور مختصر توضیح نمود. جدول که در آخر این درس آمده است شامل احتمالات مربوطه به توزیع نورمال معیاری است. جدول زیر، قسمتی از جدول آخر این درس را نشان می‌دهد. ارقامی که در بالای جدول نوشته شده است، نشان می‌دهد که جدول برای قیمت‌های مثبت z تنظیم شده و مساحت زیر منحنی را از نقطهٔ صفر تا z ارائه می‌کند.



جدول(1)



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9268	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997



جدول(2)

Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	00239	0.0279	00311	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0754
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0978	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2226
0.6	0.2258	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2454	0.2486	0.2549
0.7	0.2580	0.2612	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2996	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4409	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4727	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0/4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4966
3.0	0.4987	04987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
3.6	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.7	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.8	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.9	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000

به طور مثال؛ اگر $z=1.56$ باشد، ابتدا سطری را پیدا کنید که در آن z معادل 1.5 است. چنانچه در طول آن سطر پیش رویم تا به ستونی برسیم که بالای آن 0.06 نوشته شده است، به عدد 0.9406 بر می‌خوریم که مربوط به سطح زیر منحنی از نقطهٔ $z=0$ تا $z=1.56$ می‌باشد.

بنابرین می‌توانیم بنویسیم: $P(0 \le z \le 1.56)=0.9406$

مثال 1: دستگاه پُرکنندهٔ بوتل‌های نوشابه طوری تنظیم شده است که 952 میلی لیتر نوشابه را به داخل بوتل می‌ریزد. این میزان نوشابه دارای توزیع نورمال با اوسط 952 میلی لیتر و انحراف معیاری 4 میلی لیتر است.

احتمال این که بوتل نوشابه بین 952 تا 956 میلی لیتر نوشابه داشته باشد، چقدر است؟

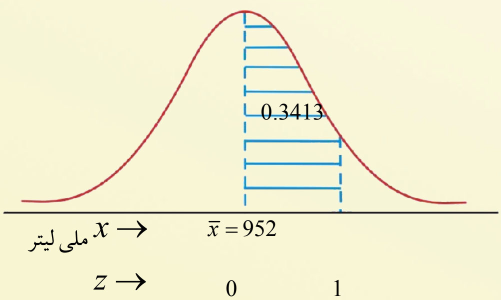
حل: ابتدا z را از جنس x دریافت می‌کنیم:

$$z_1=\frac{x-\bar{x}}{s}=\frac{952-952}{4}=\frac{0}{4}=0$$

$$z_2=\frac{956-952}{4}=\frac{4}{4}=1$$

بنابرین ناحیهٔ تعریف x از 952 تا 956 به ناحیهٔ تعریف z از 0 تا 1 تبدیل می‌شود.

با استفاده از جدول(2) داریم که $P(0 \le z \le 1)=0.3413$ و احتمال این است که بوتل حاوی 952 تا 956 میلی لیتر نوشابه می‌باشد و یا به عبارهٔ دیگر، 34.13 درصد بوتل‌های پُرشده دارای 952 تا 956 میلی‌لیتر نوشابه اند.



$$\begin{aligned}P(0 \le z \le 1)&=P(z_2)-P(z_1)\\&=P(1)-P(0)\\&=0.8413-0.5000\\&=0.3413\end{aligned}$$

مثال 2: نمرات شاگردان در مضمون ریاضی، دارای توزیع نورمال با اوسط 70 و انحراف معیاری 8 است. با استفاده از جدول نورمال معیاری، فیصدی نمرات بین 54 تا 84 را به دست آرید.

حل: حل مسأله در شکل زیر به صورت ترسیمی نشان داده شده است:

برای $x = 54$ داریم: $z_1 = \dfrac{54-70}{8} = -2$

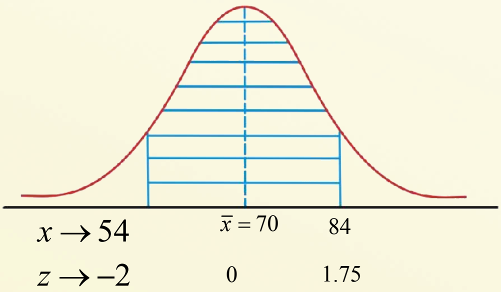
برای $x = 84$ داریم: $z_2 = \dfrac{84-70}{8} = 1.75$

چون می‌خواهیم مساحت تحت منحنی توزیع نورمال را در یک انتروال به‌دست آوریم، از جدول(2) نورمال معیاری داریم:

$$P(-2 \le z \le 0) = P(0 \le z \le 2) = 0.4772$$
$$P(0 \le z \le 1.75) = 0.9599$$

مساحت سیاه شده در شکل، احتمال مورد نظر است.

$$P(0 \le z \le 1.75) - p(-2 \le z \le 0) = 0.9599 - 0.4772 = 0.4827$$

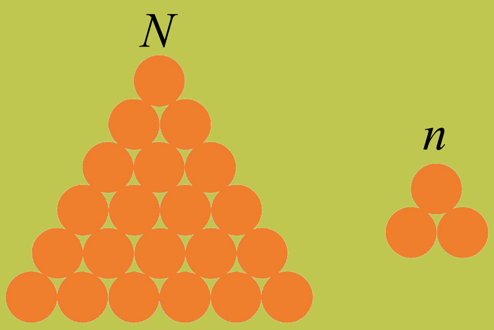


تمرین

با درنظرداشت مثال 1 محاسبه کنید که چند درصد از بوتل ها دارای 948 تا 956 ملی لیتر نوشابه اند.

نمونه‌گیری

ضرب‌المثل «مشت نمونهٔ خروار است» را چگونه تفسیر می‌کنید؟



$N =$ جامعه $\Rightarrow n = ?$

فعالیت

- اگر بخواهید قد شاگردان صنف 12 افغانستان را اندازه‌گیری نمایید، برای این کار چه روشی را پیشنهاد می‌کنید؟
- نمونه به دو دسته تقسیم می‌شود؛ نمونهٔ ساده و نمونهٔ تصادفی، شما کدام یک از این نمونه‌ها را ترجیح می‌دهید؟ چرا؟
- دلایل گوناگونی برای توجیهٔ عمل نمونه‌گیری وجود دارد آیا می‌توانید یک یا دو دلیل آن را بیان کنید؟
- آیا ویژه‌گی‌های عددی مانند اوسط و انحراف معیاری که در توزیع جامعه و توزیع نمونه استفاده می‌شوند یکسان اند؟
- آیا تفاوتی بین نتیجهٔ نمونه‌گیری و مقادیر مشاهده شدهٔ متحول‌های تصادفی وجود دارد؟

از فعالیت بالا دانسته می‌شود که روش‌های گوناگونی برای نمونه‌گیری وجود دارد:

- نمونه‌گیری تصادفی: وقتی عناصر جامعه همه برای انتخاب شدن هم‌چانس باشند.
- نمونه‌گیری سیستماتیک: وقتی عناصر جامعه به صورت منظم شماره(Code) گذاری شده باشند.
- نمونه‌گیری طبقه‌یی: وقتی جامعه به گروه‌های متجانس تقسیم شده باشند.
- نمونه‌گیری خوشه‌یی: اگر جامعه خیلی بزرگ باشد، آنرا به خوشه‌های مختلف تقسیم و از هر خوشه نمونه‌یی را انتخاب می‌کنند.
- هر ویژه‌گی عددی یک جامعه(اوسط و انحراف معیار) را پارامتر جامعه می‌گویند.

- هر ویژه‌گی عددی یک نمونه(اوسط و انحراف معیاری) را آمار می‌گویند.
- نتیجهٔ نمونه‌گیری را به عنوان قیمت‌های مشاهده شدهٔ متحول‌های تصادفی در نظر بگیرید.
- متحول‌های تصادفی $x_1, x_2 \dots x_n$ را یک نمونهٔ تصادفی از متحول تصادفی x می‌گویند اگر تابع مربوط آن به صورت $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) \dots f(x_n)$ تعریف شده باشد.

مثال: فرض کنید یک قوطی دارای 5 گلولهٔ سفید و 7 گلولهٔ سیاه است. از داخل قوطی 5 گلوله را یک یک و با جاگزینی(انتخاب دوبارهٔ یک عنصر مجاز باشد) انتخاب می‌کنیم.

نمونهٔ تصادفی انتخاب شده را به زبان متحول‌های تصادفی بیان کنید و توزیع مربوطهٔ آن‌ها را بیابید.

حل: سه متحول تصادفی x_1, x_2 و x_3 را در نظر بگیرید. متحول تصادفی x_1 عدد صفر را برای انتخاب گلولهٔ سیاه در مرحلهٔ اول و عدد یک را برای انتخاب گلولهٔ سفید در مرحلهٔ اول، اختیار می‌کند. متحول x_2 نیز عدد صفر را برای انتخاب گلولهٔ سیاه در مرحلهٔ دوم و عدد یک را برای انتخاب گلولهٔ سفید در مرحلهٔ دوم اختیار می‌کند.همچنین متحول تصادفی x_3 نیز عدد صفر را برای انتخاب گلولهٔ سیاه در مرحلهٔ سوم و عدد یک را برای انتخاب گلولهٔ سفید در مرحلهٔ سوم اختیار می‌کند. در این صورت هر یک از متحول‌های تصادفی x_1, x_2 و x_3 یک متحول تصادفی برنولی است.

پارامتر $p = \frac{5}{12}$ را برای مقادیر $i = 1, 2, 3$ داریم: $x_i = 0, 1$ $\quad f(x_i) = (\frac{5}{12})^{x_i} (1 - \frac{5}{12})^{1-x_i}$

چون نمونه گیری تصادفی است، پس متحول‌های تصادفی x_1, x_2 و x_3 مستقل از یکدیگر اند، بنابرین تابع مربوطه عبارت است از: $f(x_1, x_2, x_3) = P(x_1 = x_1 \;,\; x_2 = x_2 \;,\; x_3 = x_3)$

به‌خاطر داشته باشید که هر تابع از عناصر نمونهٔ تصادفی را که به پارامترهای مجهول بسته‌گی نداشته باشد، آماره می‌گویند.

تمرین

1- اگر حجم جامعه $N = 25$ باشد و بخواهیم نمونهٔ تصادفی 5 تایی از آن انتخاب کنیم، تعداد نمونه‌های به دست آمده چند خواهد بود؟

2- نمونهٔ ساده و نمونهٔ تصادفی را با مثال بیان کنید.

3- فرض کنید از جامعه نمونهٔ تصادفی برداشته ایم، با این نمونه چه باید بکنیم؟

توزیع اوسط نمونه

دولت می‌خواهد بداند که درآمد متوسط افراد یک شهر بزرگ چقدر است؟ برای این منظور، نمونهٔ تصادفی انتخاب و اوسط نمونه محاسبه می‌شود. حال باید از روی این مقدار محاسبه شده، کدام کمیت را تخمین کرد؟

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = ?$$

فعالیت

- دیتای جدول زیر، نتیجهٔ مسابقهٔ ورزشی سه شاگرد را نشان می‌دهد.

نام	داود	سلیمان	پژواک
نمره	2	3	4

- توزیع احتمال نمرات را بنویسید.
- اوسط و انحراف معیار نمرات شاگردان را حساب کنید.
- نمرات داده شده را به صورت جوره‌های مرتب(نمونه‌های دوتایی ممکن باجای‌گزینی) ارائه و با اوسط هر یک از نمونه‌ها به شکل جدول نشان دهید.
- جدول توزیع احتمال اوسط نمونه‌ها(جدول توزیع کثرت $\bar{x}$) را بنویسید.
- گراف مستطیلی جدول کثرت $\bar{x}$ را ترسیم کنید.
- اوسط متحول $\bar{x}$ را با اوسط نمرات شاگردان مقایسه کنید.

از فعالیت بالا نتیجهٔ زیر به دست می‌آید:

اگر $x_1, x_2, ..., x_n$ یک نمونهٔ تصادفی از جامعهٔ تابع احتمال $f(x)$ باشد، در این صورت توزیع احتمال نمونهٔ تصادفی عبارت است از:

x	x_1	x_2	......	x_n
$f(x)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	......	$\frac{1}{n}$

اوسط متحول $\bar{x}_n$ $\qquad E(\bar{x}_n)=\mu$

واریانس متحول $\bar{x}_n$ $\qquad V(\bar{x}_n)=\frac{1}{n}\ \delta^2$

واریانس نمونه $\qquad S_n^{\ 2}=S^2=\frac{1}{n-1}\ \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$

اوسط واریانس نمونه $\qquad E(S^2)=\delta^2$

در حالی که $\bar{x}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ اوسط نمونه، μ اوسط جامعه، δ^2 واریانس جامعه و S^2 واریانس نمونه اند.

مثال: از جامعهٔ زیر، تمام نمونه‌های تصادفی دوتایی ممکن را با جای گزینی انتخاب می کنیم:

$$f(x)=\frac{1}{3} \quad , \quad x=1 \ , \ 2 \ , \ 3$$

الف: توزیع احتمال x را بنویسید.

ب: اوسط و واریانس جامعه را حساب کنید.

ج: جدول توزیع $\bar{x}$ را تشکیل و گراف مستطیلی $\bar{x}$ را رسم کنید.

د: $E(\bar{x})$ و $V(\bar{x})$ را حساب کنید.

حل:

الف:

x	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

ب:

$$\mu=E(x)=\sum_{x=1}^{3} x\,f(x)=\frac{1}{3}(1+2+3)=2$$

$$E(x^2)=\sum_{x=1}^{3} x^2 f(x)=\frac{1}{3}(1^2+2^2+3^3)=\frac{14}{3}$$

$$\delta_x^2=E(x^2)-(E(x))^2=\frac{14}{3}-2^2=\frac{2}{3}$$

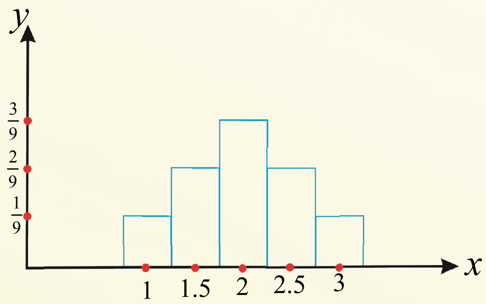
ج: جدول زیر، تمام نمونه‌های دوتایی ممکن با جاگزینی و اوسط هر یک را نشان می‌دهد:

نمونه	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(3,1)	(3,2)	(3,3)
$\overline{x}$	1	1.5	2	1.5	2	2.5	2	2.5	3

جدول توزیع کثرت $\overline{x}$ به صورت زیر ارائه می‌شود.

$\overline{x}$	1	1.5	2	2.5	3
$f(\overline{x})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

گراف مستطیلی $\overline{x}$ به صورت زیر رسم می‌شود.



د:

$$\mu_{\overline{x}} = E(\overline{x}) = \sum \overline{x} f(\overline{x}) = 1 \cdot \frac{1}{9} + 1.5 \cdot \frac{2}{9} + 2 \cdot \frac{3}{9} + 2.5 \cdot \frac{2}{9} + 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{18}{9} = 2$$

$$E(\overline{x}^2) = \sum \overline{x}^2 f(\overline{x}) = 1^2 \cdot \frac{1}{9} + (1.5)^2 \cdot \frac{2}{9} + 2^2 \cdot \frac{3}{9} + (2.5)^2 \cdot \frac{2}{9} + 3^2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{13}{3}$$

$$\delta_{\overline{x}}^{\ 2} = V(\overline{x}) = E(\overline{x}^2) - (E(\overline{x}))^2 = \frac{13}{3} - 4 = \frac{1}{3}$$

طوری که دیده می‌شود:

$$E(x) = E(\overline{x}) = 2$$

$$V(\overline{x}) = \frac{\delta_x^{\ 2}}{n} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

تمرین

1- فرض کنید جامعه‌یی متشکل از چهار عدد $6,4,2$ و 8 باشد، در این صورت: توزیع، اوسط و وریانس این جامعه را محاسبه کرده و سپس از این جامعه نمونهٔ تصادفی دوتایی با جای‌گزینی انتخاب و توزیع اوسط نمونه یعنی $\bar{x}$ را به‌دست آورید گراف چند ضلعی کثرت آن را ترسیم و اوسط و وریانس $\bar{x}$ را حساب کنید؟

قضیهٔ لیمت مرکزی

می‌دانیم که کمیت جامعه را پارامتر جامعه و کمیت نمونه را اوسط نمونه می‌گویند.آماره نمونه‌های $\bar{x}$ و $S_{\bar{x}}$ اطلاعات دربارهٔ کدام پارامترها را در اختیار ما می‌گذارد؟

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}=?$$

فعالیت

- اگر حجم جامعهٔ بزرگ را به $\frac{S}{\sqrt{n}}$ و حجم جامعهٔ کوچک را به $\frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ (درحالی که N تعداد عناصر جامعه، n تعداد عناصر نمونه و s انحراف معیار باشند) نشان دهید، چه وقت حجم جامعهٔ بزرگ می‌تواند مساوی با حجم جامعهٔ کوچک شود؟
- اگر $x_1, x_2, \ldots, x_n$ دارای توزیع نورمال و مستقل از یکدیگر باشند، آیا حاصل جمع آن‌ها دارای توزیع نورمال است؟
- اگر متحول‌های تصادفی مستقل $x_1, x_2, \ldots, x_n$ به طور یکسان توزیع شده و دارای اوسط μ و وریانس δ^2 باشند، گفته می‌توانید که اوسط و وریانس توزیع $S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ چند است؟

از فعالیت فوق به نتیجهٔ زیر دست می‌یابیم:

اگر از یک جامعهٔ بزرگ N با اوسط متناهی μ و وریانس متناهی δ^2 یک نمونهٔ تصادفی n تایی انتخاب کنیم، در این صورت اوسط نمونه؛ یعنی $\bar{x}$ دارای توزیع به گونهٔ تقریبی نورمال با اوسط $\mu_{\bar{x}} = \mu$ و وریانس $\delta_{\bar{x}}^2 = \frac{\delta^2}{n}$ و متحول تصادفی $z = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}$ دارای توزیع نورمال معیاری است.

اگر ضریب $\frac{N-n}{N-1}$ برای قیمت‌های بزرگ N به عدد 1 نزدیک شود، لیمت آن وقتی که $n \to \infty$ کند، مساوی با 1 می‌شود.

مثال: نمرات شاگردان در یک صنف بزرگ، دارای توزیع نورمال با اوسط 71 و انحراف معیاری 9 است. یک نمونهٔ 9 تایی انتخاب می‌کنیم. احتمال این را که اوسط نمرات این نمونه بیشتر از 80 باشد، حساب کنید. همچنان اگر یک شاگرد را به طور تصادفی انتخاب کنیم، احتمال آن را که نمرهٔ او بیشتر از 80 باشد، محاسبه کنید.

حل: چون $\bar{x}$ دارای توزیع نورمال با اوسط μ و انحراف معیاری می‌باشد، داریم:

$$P(z>80)=P(z=\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}>\frac{80-71}{\frac{9}{\sqrt{9}}})=P(z>3)$$
$$=1-P(z\leq 3)=1-0.9987=0.0013$$

همچنان برای $n=1$ داریم:

$$P(z>80)=P(\frac{\bar{x}-\mu}{\delta}>\frac{80-71}{9})=P(z>1)$$
$$=1-P(z\leq 1)=1-0.8413=0.1587$$

توجه: قیمت $P(z)$ را از جدول (1) توزیع نورمال به دست می‌آوریم.

تمرین

وزن جعبه‌هایی که توسط یک ماشین بسته بندی می‌شوند، دارای توزیع نورمال با اوسط $\mu = 250gr$ و انحراف معیاری $\delta = 20gr$ می‌باشند. احتمال آن را که اوسط وزن یک نمونهٔ تصادفی $n = 16$ تایی از جعبه ها کم‌تر از $240gr$ باشد، محاسبه کنید.

توزیع نمونهٔ نسبت

در شهر A به تعداد n نفر می‌خواهند شخص B را بـه عنوان شاروال انتخاب نمایند. اگر این اشخاص مـورد سوال قرار گیرند و نشان دهندهٔ تعداد اشخاص موافق باشد، کثرت نسبی آن مساوی به چیست؟

- اگر x دارای توزیع دو جمله‌یی باشد، می‌توانیم بنویسیم:

$$f(x)=\binom{n}{x}P^{x}(1-p)^{n-x} \qquad x=0,1,2,\dots\dots\dots,n$$

- اگر $\hat{P}=\frac{x}{n} \Rightarrow x=n\hat{P}$ باشد، با تعویض قیمت x در فورمول بالا $f(\hat{P})$ را بنویسید.
- در فورمول $\hat{P}=\frac{x}{n}$ اگر متحول تصادفی x متشکل از مجموع n متحول تصادفی $x_1,x_2,\dots,x_n$ باشد، $\hat{P}$ با اوسط نمونه چه رابطه‌یی دارد؟

اگر x متحول تصادفی، n مجموعهٔ آزمایش‌های برنولی و P احتمال موفقیت هر آزمایش باشد، در این صورت: $\hat{P}=\frac{x}{n}$ آمارهٔ نسبت نمونهٔ، $E(x)=np$ اوسط $(Expected\ Value)$ و $V(x)=npq$ وریانس متحول تصادفی x می‌باشند.

با توجه به توزیع دوجمله‌یی، می‌توان توزیع $\hat{P}$ را توسط این فورمول انجام داد:

$$f(n\hat{P})=\binom{n}{n\hat{P}}p^{n\hat{p}}(1-p)^{n(1-\hat{p})} \qquad \hat{P}=0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\dots\dots,1$$

اوسط $(Expected\ Value)$ و وریانس متحول‌های تصادفی $\hat{P}$ به این صورت است: $\mu_p=E(\hat{P})=P$

$$\delta^2\hat{P}=V(\hat{P})=\frac{pq}{n}=\frac{p(1-p)}{n}$$

توزیع‌های نورمال معیاری عبارت است از:

$$z=\frac{x-np}{\sqrt{npq}}=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

مثال: احتمال مرغوب بودن کالایی، $P=0.3$ است. یک نمونهٔ تصادفی سادهٔ $n=6$ تایی را انتخاب می‌کنیم. اگر x نشان‌دهندهٔ تعداد کالاهای ناقص باشد، توزیع احتمال x و $\hat{P}$ را بنویسید.

حل: متحول‌های تصادفی x، دارای توزیع دوجمله‌یی با پارامترهای $P=0.3$ و $n=6$ می‌باشد.

$$f(x)=P(X=x)=B(x,6,0.3) \qquad x=0\,,1\,,\ldots\,,6$$

با استفاده از جدول زیر توزیع دوجمله‌یی احتمال‌های فوق را محاسبه کرده و جدول توزیع احتمال را می‌نویسیم:

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0.1176	0.3025	0.3241	0.1852	0.0595	0.0102	0.0007

متحول تصادفی $\hat{P}$ قیمت‌های $0,\frac{1}{6},\frac{2}{6},\frac{3}{6},\frac{4}{6},\frac{5}{6}$ و 1 را اختیار می‌کند:

$$P(\hat{P}=0)=P(X=0)=0.1176$$

$$P(\hat{P}=\frac{1}{6})=P(X=1)=0.3025$$

و بقیه نیز به طور مشابه محاسبه می‌شوند؛ توجه کنید که:

$$P(\hat{P}=\frac{x}{n})=P(X=x)$$

و توزیع احتمال $\hat{P}$ عبارت است از:

$\hat{P}$	0	1.6	2.6	3.6	5.6	1
$f(\hat{P})$	0.1176	0.3025	0.3241	0.0595	0.0102	0.0007

در مثال بالا:

$$P(\hat{P}\le 0.6)=P(x\le 3.6)=P(x\le 3)=\sum_{x=0}^{3}B(x,6,0.3)=0.9294$$

و یا:

$$P(\hat{P}\le 0.27)=P(x\le 1.62)=P(x\le 1)=0.1176+0.3025=0.4201$$

تمرین

1. احتمال اینکه شخصی فورم درخواست استخدام را به طور کامل و بدون اشتباه پر کند $P=0.7$ می‌باشد. یک نمونهٔ $n=200$ تایی از فورم‌های استخدام پر شده را انتخاب کرده ایم:

   – احتمال آن را محاسبه کنید که $\hat{P}$ در داخل فاصلهٔ ± 0.05 از نسبت جامعه؟

   – احتمال آن را حساب کنید که $\hat{P}$ بیشتر از 0.6 باشد.

نکات مهم فصل هفتم

- متحول تصادفی، اصطلاحی است که به عنوان یک تابع در احصائیه و احتمالات مورد استفاده قرار می‌گیرد.
- تابع احتمال یک متحول تصادفی گسسته، تابعی می‌باشد که ناحیهٔ تعریف آن اعدادی است که متحول تصادفی می‌تواند اختیار کند و ناحیهٔ قیمت‌های آن شامل احتمال‌های مربوط به عناصر ناحیهٔ تعریف است.
- تابع احتمال تجمعی و پیوسته تابعی است که ناحیهٔ تعریف آن شامل آن اعدادی است که متحول تصادفی x اختیار می‌کند و ناحیهٔ قیمت‌های آن همه تصاویر $f(x)$ می‌باشد.
- اوسط $(Expected\ Value)$ و وریانس متحول تصادفی گسستهٔ x به ترتیب عبارت است از:

$$E(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)=\bar{x}$$

$$V(x)=S^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(x_i))^2 f(x_i)$$

- توزیع برنولی: $P(X=m)=P^m(1-P)^{1-m}$

- توزیع دوجمله‌یی: $P(X=m)=\binom{n}{m}P^m\ q^{n-m}$

- اوسط و انحراف معیار توزیع دوجمله‌یی عبارت اند از: $S=\sqrt{n\,p\,q}$, $\bar{x}=n\,p$

- توزیع احتمال پواسن، توزیع احتمال مجزا است که فورمول آن عبارت است از:

$$P(x=m)=\frac{e^{-\lambda}\ \lambda^m}{m!}$$

- توزیع نورمال: شکل توزیع نورمال متناظر و شبه زنگوله است در توزیع نورمال شاخص‌های مرکزی با هم برابر اند و متحول‌های تصادفی پیوسته دارای ناحیهٔ تعریف محدود می‌باشد. تابع احتمال آن عبارت است از:

$$f(x)=\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\bar{x}}{\delta})^2}$$

درحالی که μ اوسط جامعه و δ انحراف معیار جامعه است.

- برای محاسبهٔ مساحت تحت منحنی تابع احتمال $f(x)$ در فاصله‌های a الی b، می‌توان از انتیگرال زیر استفاده نمود: $P(a\le x\le b)=\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\delta})^2}$

- توسط رابطهٔ $z=\frac{x-\mu}{\delta}$ می‌توان هر مجموعهٔ احصائیوی را که دارای توزیع نورمال است، به نورمال معیاری تبدیل کرد.
- نمونه به دو دسته تقسیم می‌شود: نمونهٔ ساده و نمونهٔ تصادفی.
- روش‌های نمونه گیری به صورت عموم عبارت اند از: نمونه گیری تصادفی، نمونه‌گیری منظم، نمونه گیری گروهی و خوشه‌یی.
- کمیت نمونه را اوسط نمونه و کمیت جامعه را پارامتر جامعه می گویند.
- تابع مربوط متحول‌های تصادفی نمونهٔ x را به صورت $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=f(x_1)f(x_2)\dots f(x_n)$ تعریف می کنند.
- اگر x یک نمونهٔ تصادفی از جامعه با تابع احتمال $f(x)$ باشد، $E(\bar{x}_n)=\mu$ اوسط، $V(\bar{x}_n)=\frac{1}{n}\delta$ وریانس اوسط، δ^2 وریانس جامعه و S^2 را وریانس نمونه می‌نامند.
- هرگاه از یک جامعهٔ نورمال N یک نمونهٔ تصادفی n تایی انتخاب کنیم؛ آمارهٔ اوسط نمونهٔ $\bar{x}$ دارای توزیع نورمال با اوسط $\mu_{\bar{x}}=\mu$ و وریانس $\delta_{\bar{x}}^2=\frac{\delta^2}{n}$ و توزیع نورمال معیاری $z=\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}$ می‌باشد.
- هرگاه x توزیع دو جمله‌یی، به n تعداد آزمایش‌های تکراری برنولی، P احتمال کامیابی و $q=1-p$ عدم احتمال کامیابی هر آزمایش باشند، در این صورت آمارهٔ نسبت نمونهٔ اوسط $(Expected\ Value)$ و وریانس متحول تصادفی x به ترتیب عبارت اند از: $\hat{P}=\frac{x}{n}$, $E(x)=np$ و $V(x)=npq$

همچنان توزیع دو جمله‌یی، اوسط، وریانس و توزیع نورمال معیاری و متحول تصادفی $\hat{P}$ به ترتیب عبارت اند از:

$$E(\hat{P})=P \quad , \quad f(\hat{P})=\binom{n}{n\hat{P}}P^{n\hat{P}}\ q^{(1-P)}$$

$$z=\frac{\hat{P}-P}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \quad , \quad V(\hat{P})=\frac{pq}{n}$$

تمرینات عمومی فصل هفتم

1. دو سکه را چهار مرتبه با هم پرتاب کنید و تعداد خط‌ها را در نظر بگیرید:
   - متحول‌های تصادفی را به صورت تابع نشان دهید.
   - احتمال هر یک از پرتاب‌ها را با فضای نمونه نسبت دهید.
   - تابع احتمال گسسته و تجمعی آن را بنویسید.
2. هر گاه احتمال ناقص بودن یک جوره بوت $P = 0.1$ باشد، اوسط و انحراف معیار بوت‌های ناقص را در یک نمونه $n = 400$ جوره بوت دریافت کنید؟

3. در انبار یک شرکت به تعداد 500 پایه کمپیوتر وجود دارد که از آن جمله، 50 پایهٔ آن نواقص دارد. یک مشتری 10 پایه از این کمپیوتر ها را می‌خرد، احتمال این‌که وی 8 پایهٔ سالم را خریده باشد چقدر است؟
4. از اطلاعات زیر که مربوط به دو پارامتر اوسط و انحراف معیار می‌شود، برای رسم یک توزیع نورمال استفاده نمایید.

ابتدا یک محور افقی رسم کنید و نقاط $\bar{x}$, $\bar{x}+s$, $\bar{x}-s$, $\bar{x}+2s$ و $\bar{x}-2s$ را در روی آن محور مشخص کنید سپس نقطه‌یی را به ارتفاع اختیاری h در بالای $\bar{x}$ در نظر بگیرید. اکنون در بالای $\bar{x}+s$ نقطه‌یی به ارتفاع $0.6h$ انتخاب کنید؛ یعنی نقطه‌یی با مختصات $(\bar{x}+s, 0.6h)$. چون منحنی نورمال متناظر است، همین عمل را در خصوص $\bar{x}-s$ نیز انجام دهید. حال در بالای $\bar{x}+2s$ و $\bar{x}-2s$ دو نقطه‌یی به ارتفاع h و $0.15h$ در نظر بگیرید. متوجه باشید که برای رسم دقیق منحنی نورمال باید اعداد $0.6067h$ و $0.1354h$ به جای $0.6h$ و $0.15h$ مورد استفاده قرار گیرند. در نتیجه، این نقاط را توسط یک خط منحنی به هم وصل کنید و بگویید که این منحنی در کدام فاصله‌ها محدب و در کدام فاصله‌ها مقعر است.

5. یک مطالعه در یک شفاخانه نشان می‌دهد که تعداد متوسط مراجعین در ساعات 6 الی 8 بعد از ظهر روز شنبه 25 نفر است. فرض کنید که توزیع تابع احتمال پواسن در این حالت صدق می‌کند.
   - توزیع احتمال تعداد مراجعین شفاخانه بین ساعات 6 الی 8 بعد از ظهر روز شنبه را به‌دست آورید و گراف آن را رسم کنید آیا این توزیع خمیده است؟
   - مقدار اوسط و انحراف معیار این توزیع را به دست آورید.
   - آیا ممکن است که بیش از 7 نفر بین ساعات 6 الی 8 بعد از ظهر روز شنبه به شفاخانه مراجعه کنند؟ چرا؟

6. فرض کنید تعداد اشتباهات یک صفحه از یک کتاب دارای توزیع پواسن با پارامتر $\lambda = \frac{1}{2}$ می‌باشد مطلوب است محاسبهٔ احتمال این که:

- حد اقل یک اشتباه تایپی در این صفحه وجود داشته باشد.
- به طور دقیق 5 اشتباه تایپی در این صفحه وجود داشته باشد.
- بین 3 الی 6 اشتباه تایپی در این صفحه وجود داشته باشد.

7. فرض کنید که قطر پیستون‌هایی که توسط ماشین اتوماتیکی ساخته می‌شوند، به طور نورمال با اوسط 25 میلی متر و انحراف معیاری 0.5 میلی متر توزیع شده است:
   - احتمال این‌که قطر پیستون بین 25.2 تا 25.9 میلی‌متر باشد، چقدر است؟
   - چه نسبتی از پیستون‌ها دارای قطرهایی معادل 25 میلی‌متر و کمتر اند.
   - اگر 1000 پیستون ساخته شود، چند دانهٔ آن‌ها احتمال می‌رود که قطری کم تر از 24.07 میلی‌متر داشته باشند.
   - چه درصدی از پیستون‌های تولیدی، قطری معادل 24.56 میلی‌متر یا بیشتر دارند؟

8. میزان درآمد افراد یک شهر، دارای توزیع غیرنورمال با اوسط $\mu = 90$ افغانی و انحراف معیاری 25 افغانی است. احتمال آن که مجموع درآمد افراد یک نمونهٔ 225 نفره بیش از 21000 افغانی باشد، چقدر است؟

9. می دانیم که 56% مردم طرف‌دار نامزد A هستند. چقدر احتمال دارد که در یک نمونه $n = 50$ تایی، حداقل 60% افراد طرف‌دار نامزد A باشند؟

10. در مثال بالا اگر $P = 0.4$ باشد؛ یعنی احتمال این‌که فردی طرف‌دار نامزد A باشد مساوی به 0.4 است، یک نمونهٔ $n = 200$ تایی انتخاب می کنیم. چقدر احتمال دارد که لااقل 100 نفر از آن‌ها طرفدار نامزد A باشند؟

فصل هشتم

احتمالات

فضای نمونهٔ گسسته و پیوسته:

در شکل مقابل، از نل‌های شماره 1 و 2 آب بر زمین می‌ریزد. چه تفاوتی بین ریختن قطره‌های آب از نل‌های مذکور وجود دارد؟

فعالیت

- با پرتاب یک دانهٔ رمل می‌توانید بگویید که فضای نمونهٔ تمام نتایج ممکن کدام است؟
- آیا زمان افتادن یک عدد سیب پخته را از درخت پیش‌بینی کرده می‌توانید که طور دقیق بعد از گذشت چند ثانیه، دقیقه و یا ساعت به زمین خواهد افتاد؟
- فضای نمونهٔ افتادن سیب را نظر به زمان بنویسید؟
- تعداد عناصر فضای نمونهٔ پرتاب دانه رمل و افتادن سیب از درخت را چگونه مقایسه می‌کنید؟

از انجام فعالیت فوق نتیجه زیر به دست می‌آید:

فضاهای نمونهٔ یک تجربهٔ اتفاقی، عبارت از مجموعه معین یا نامعین و یا محدود یا غیرمحدودی اند که یک دستهٔ آنها قابل شمارش (countable) و دستهٔ دیگر آنها غیر قابل شمارش(uncountable) می‌باشد. فضای نمونه‌یی که عناصر آن قابل شمارش و تشخیص اند، به نام فضای نمونهٔ گسسته یا غیرمتصل و فضای نمونه‌یی که عناصر آن قابل شمارش نیستند به نام فضای نمونهٔ متمادی یا پیوسته یاد می‌گردند.

مثال 1: کدام یک از فضاهای نمونهٔ زیر پیوسته و کدام یک آن‌ها گسسته است:

الف: پرتاب دو دانه رمل

ب: انتخاب یک عدد حقیقی بین 8 و 12

ج: انتخاب 3 نفر متعلم از بین 30 نفر شاگرد

د: بالا رفتن درجهٔ حرارت یک کوره از 100 درجهٔ سانتی گرید به 1000 درجهٔ سانتی گرید

هـ: انتخاب زاویه بین 30° الی 45°.

حل: الف و ج چون از تعداد محدود عضو تشکیل گردیده، فضای نمونهٔ گسسته هستند وچون ب، د و هـ از اعداد حقیقی تشکیل گردیده اند، نامحدود و یا پیوسته می‌باشند.

مثال 2: خیبر برای آب دادن گل‌های داخل حویلی خود، یک واترپمپ خریده است. هرگاه عمر واتر پمپ را برحسب ساعت در نظر بگیریم، فضای نمونهٔ طول عمر واترپمپ می‌تواند هر عدد حقیقی مثبت در صورت خراب شدن باشد و وقوع همچو یک حادثهٔ اتفاقی صفر و یا هر عدد حقیقی شده می‌تواند که این فضای نمونه، یک فضای نمونهٔ متمادی و یا پیوسته است.

یعنی: $S = \{t \in IR : t \geq 0$ زمان خراب شدن واترپمپ $t\}$ است و در فضای نمونهٔ فوق t نشان دهندهٔ طول عمر واترپمپ می‌باشد.

یادداشت:

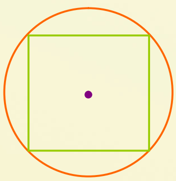
1- در مثال اول جز الف و ج فضاهای نمونه محدود و عناصر آنها قابل شمارش، و جز ب، د و هـ فضاهای نمونه نامحدود و عناصر آنها غیر قابل شمارش می‌باشند، که تمام اعداد حقیقی مثبت را می‌تواند در بر داشته باشد.

2- در مثال دوم، فضای نمونه پیوسته یا نامحدود است که به صورت یک انتروال اعداد حقیقی ارایه می‌گردد.

تمرین

1- تیراندازی به داخل یک دیسک دایروی با شعاع r را در نظر گرفته و فضای نمونهٔ محل اصابت تیر به داخل دایره را که نزدیک به مرکز اصابت می‌نماید ارایه می‌کند، بگویید که چگونه یک فضای نمونه است؟

2- یک نقطه را به صورت تصادفی در داخل دایرهٔ شکل مقابل انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال آنکه نقطه داخل مربع باشد؟



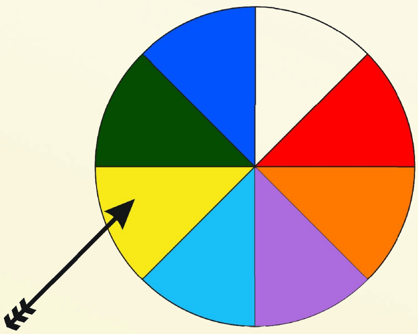
3- یک عدد دو رقمی طبیعی را انتخاب نموده و احتمال آن را که عدد مضرب 4 باشد، دریافت کنید.

حوادث هم چانس

در انداختن یک دانه رمل نورمال شرط آمدن شمارهٔ 1 و یا 5 چیست؟
چانس آمدن شماره‌های 2 و 5 با هم چه رابطه‌یی دارند؟

فعالیت

مطابق شکل، اگر تیری به سمت دایرهٔ داده شده بیندازیم:



- چانس برخورد تیر به ناحیهٔ رنگ سرخ و سبز با هم چه رابطه‌یی دارند؟
- درمورد مقدار چانس برخورد تیر به رنگ‌های نارنجی و سفید چه گفته می‌توانید؟
- مقدار چانس برخورد تیر به رنگ سیاه چند است؟
- فضای نمونهٔ تجربه را بنویسید؟
- حوادث اتفاقی اولیه را فهرست نموده و بگویید که مقدار احتمال هر کدام چند است؟
- درمورد مجموع احتمالات حوادث اولیه چه گفته می‌توانید؟

از انجام فعالیت فوق نتیجهٔ زیر به دست می‌آید:

حوادث سادهٔ اولیه که احتمال وقوع آنها در اثر انجام یک تجربه با هم برابر باشد، به نام حوادث چانس یاد می‌گردند.

مثلاً: هرگاه $S=\{e_1,e_2\ ,...e_n\}$ یک فضای نمونه باشد، در این صورت $\{e_i\}$ برای $i=1,2...,n$ هر کدام یک حادثهٔ اتفاقی اولیه است که $0\le P(\{e_i\})\le 1$, $i=1\ ,\ 2\ ,\ ...,n$ می‌باشد.

همچنین، مجموع احتمالات حوادث اولیه مساوی با یک است:

$$P(\{e_1\})+P(\{e_2\})+\ldots+P(\{e_n\})=\sum_{i=1}^{n}P(e_i)=1$$

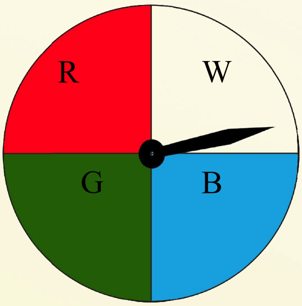
مثال: 4 نفر در یک مسابقه شرکت می‌کنند، احتمال برنده شدن هر کدام آنها در صورت فضای نمونهٔ هم‌چانس مطلوب است.

حل: هرگاه فضای نمونه $S=\{a,b,c,d\}$ باشد، احتمال هر حادثهٔ اتفاقی اولیه $\frac{1}{4}$ می‌باشد. در آن‌صورت داریم: $P(a)=P(b)=P(c)=P(d)=\frac{1}{4}$

ازاین‌رو حوادث اتفاقی $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$ و $\{d\}$ حوادث هم چانس هستند.

تمرین

1- شکل مقابل را در نظر گرفته و بگویید اگر احتمال ایستادن عقربه بالای رنگ آبی و سفید 0.30 و روی رنگ سرخ 0.26 باشد، احتمال ایستادن آن روی رنگ سبز چند است؟

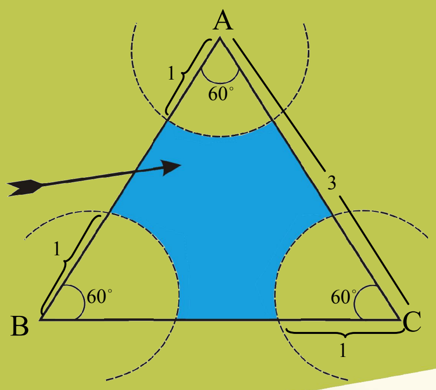


2- جدول کثرت زیر را برای انداختن یک دانه رمل در نظر بگیرید و دریافت کنید احتمال آن‌را که دانهٔ رمل شماره 5 آید.

شماره رمل	1	2	3	4	5	6
کثرت	7	9	8	7	3	10

3- یک دانه رمل طوری پرکاری شده است که احتمال آمدن شماره‌های جفت دوچند شماره‌های طاق است، احتمال شمارهٔ 5 رمل را دریافت کنید؟

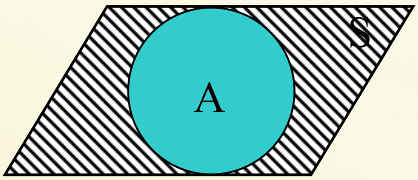
احتمال فضاهای پیوسته



تیری به داخل یک مثلث متساوی‌الاضلاع که طول هر ضلع آن 3 واحد است، پرتاب می‌کنیم. احتمال آن که نقطهٔ اصابت تیر از هر رأس مثلث بزرگ‌تر از 1 واحد باشد، چند است؟

فعالیت

- آیا گفته می‌توانید که در یک قطعه خط، قسمتی از یک مستوی و یا حجمی از فضا چند نقطه کنار هم قرار دارند؟
- احتمال وقوع نقاطی در ساحهٔ A مساحت فرعی S که در شکل نشان داده شده است، با نسبت مساحت‌های ساحه‌های A و S چه رابطه‌یی دارد؟



- آیا می‌توانیم این مسأله را بر محاسبهٔ احتمال قسمتی از حجم یک جسم فضایی تعمیم دهیم؟

از انجام فعالیت فوق نتیجهٔ زیر به دست می‌آید:

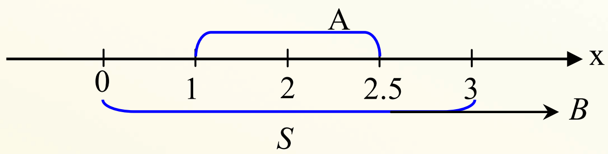
فضای نمونهٔ پیوسته یک مجموعهٔ نامحدود یا نامعین از نقاط است که به شکل محور اعداد حقیقی، سطح در مستوی و یا احجام در فضا می‌باشد. چون نمایش این نقاط ممکن نیست، برای پیدا کردن نسبت احتمال از طول قطعه خط‌ها، سطوح اشکال و یا حجم اجسام استفاده می‌نماییم.

به طور معمول برای استفاده از محور اعداد یک متحول x، قسمتی از یک مساحت از دو متحول x و y و بالاخره برای احجام از متحولین x, y و z استفاده به عمل می‌آوریم:

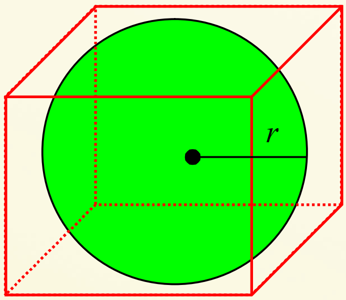
مثال 1: روی محور اعداد در انتروال باز $(0,3)$ یک نقطهٔ مانند x را به صورت اتفاقی انتخاب می‌نماییم. احتمال این را که $1 < x < 2.5$ باشد، دریافت کنید؟

حل: محور اعداد حقیقی را رسم نموده و فواصل S و A را روی آن مشخص می‌نماییم. بنابرین با در نظر داشت شکل برای احتمال حادثهٔ A داریم:

$$P(A)=\frac{\text{طول قطعه خط A}}{\text{طول قطعه خط B}}=\frac{2.5-1}{3-0}=\frac{1.5}{3}=\frac{1}{2}$$



مثال 2: به صورت اتفاقی، یک نقطه را در داخل یک مکعب به ضلع 2 واحد انتخاب می‌نماییم. احتمال آن را که این نقطه داخل کرهٔ محاطی مکعب مذکور باشد، دریافت کنید؟



حل: اگر یک کره در داخل مکعبی به ضلع a محاط شده باشد، آنگاه شعاع کره $r=\frac{a}{2}$ خواهد بود. بنابراین حادثهٔ اتفاقی A = حجم کره و فضای نمونهٔ S، حجم مکعب می‌باشد.

$$r=\frac{a}{2}=\frac{2}{2}=1$$

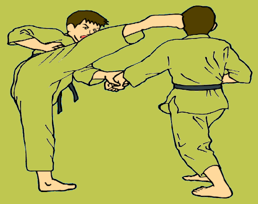
$$P(A)=\frac{\text{حجم کره}}{\text{حجم مکعب}}=\frac{\frac{4}{3}\pi r^{3}}{a^{3}}=\frac{\frac{4}{3}\pi (1)^{3}}{2^{3}}=\frac{\pi}{6}$$

تمرین

1- روی محور اعداد حقیقی دو نقطهٔ A و B را به صورت اتفاقی انتخاب می‌نماییم طوری که $-2\le B\le 0$ و $O\le A\le 3$ باشد، مطلوب است احتمال آن که فاصلهٔ d بین نقاط A و B بزرگ‌تر از 3 واحد باشد.

2- اگر یک نقطه را به صورت تصادفی روی سطح یک دایره انتخاب نماییم، احتمال آن را که نقطهٔ مذکور به مرکز دایره نزدیک‌تر از محیط آن باشد، دریافت کنید.

احتمال مشروط



از جملهٔ 20 تن محصل ذکور و اناث که از یک ولایت در امتحان کانکور موفقانه به پوهنحی طب کامیاب شده اند، به تعداد 5 تن آنها کاراته بازهای خوب نیز هستند. اگر از جمله 15 پسر کامیاب شده 4 تن ورزشکار یعنی کاراته بازهای خوب باشند اگر از بین محصلین مذکور به طور اتفاقی یک تن را انتخاب نماییم، دریافت کنید احتمال آن که:

- نفر انتخاب شده یک دختر کاراته باز باشد؟
- در سوال بالا انتخاب دختری که به پوهنځی طب کامیاب شده باشد مشروط به چیست؟

از 2500 تن شاگرد، 1600 تن‌شان به مطالعه کردن عادت دارند. هرگاه 70 درصد شاگردان مرد که 80 درصد مجموع شاگردان را تشکیل می‌دهند، به مطالعه کردن عادت داشته باشند، اگر احتمال برای همه شاگردان مساوی باشد، با در نظرداشت حوادث زیر برای انتخاب یک شاگرد از بین شاگردان موسسه هرگاه:

R: به مطالعه عادت دارد.

M : شاگرد مرد است.

F: یک خانم است.

به حل سوالات زیر فکر نمایید:

- دریافت کنید احتمال آن که از جملهٔ مطالعه کننده‌گان یک شاگرد انتخاب شده مرد باشد؟
- دریافت کنید احتمال آن که یک شاگرد انتخاب شده از بین مطالعه کننده‌گان یک خانم باشد؟
- دریافت کنید احتمال آن که فرد انتخاب شده یک مرد علاقه‌مند به مطالعه باشد؟

از انجام فعالیت فوق نتیجهٔ زیر به دست می‌آید:

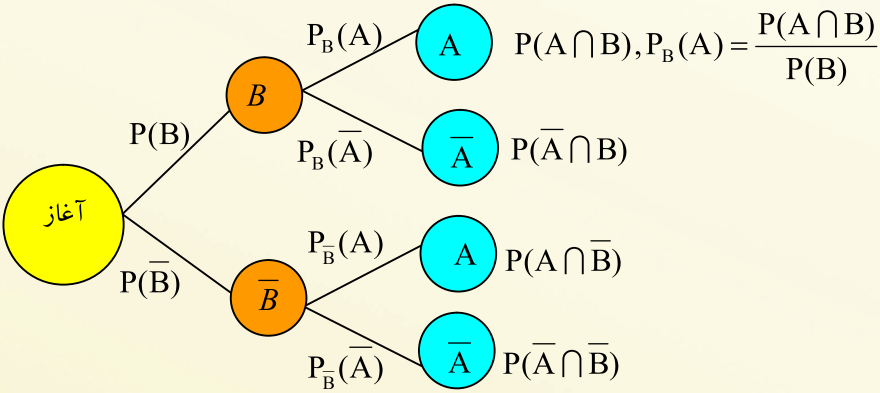
در حقیقت، دریافت احتمال انتخاب شاگرد مرد به‌شرط آن که به مطالعه کردن عادت داشته باشد، عبارت از حاصل تقسیم احتمالات زیر می‌باشد. اگر Ω فضای نمونه و $|\Omega|$ تعداد عناصر آن باشد داریم که:

$$\text{احتمال انتخاب مردی که عادت به مطالعه داشته باشد} = \frac{|M \cap R|}{|R|} = \frac{\frac{|M \cap R|}{\Omega}}{\frac{|R|}{|\Omega|}} = \frac{P(M \cap R)}{P(R)} = P_R(M)$$

$P_R(M)$ عبارت از احتمال حادثه‌یی است که فرد انتخاب شده یک مرد به شرط آن که عادت به مطالعه داشته باشد، است.

تعریف: هرگاه A و B دو حادثهٔ اتفاقی یک فضای نمونهٔ S باشند، طوری‌که $P(B) \neq 0$ در این صورت احتمال $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ به نام احتمال مشروط حادثهٔ اتفاقی A نظر به حادثهٔ اتفاقی B یاد می‌گردد.

با در نظرداشت تعریف فوق، نظر به قاعدهٔ اول مسیر، از دیاگرام‌های درختی نیز می‌توانیم استفاده کنیم:



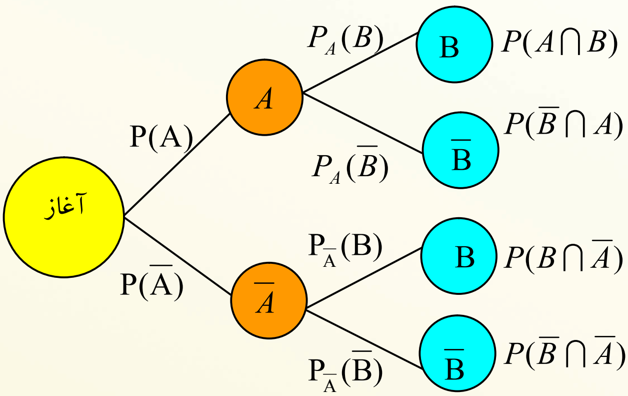
از فورمول احتمال مشروط، نتیجهٔ مهم زیر به دست می‌آید:

1- با استفاده از قاعدهٔ اول مسیر، داریم: $P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$

و با استفاده از قاعده دوم مسیر، داریم: $P(A \cap \overline{B}) = P(\overline{B}) \cdot P_{\overline{B}}(A)$

$$P(A) = P(B) \cdot P_B(A) + P(\overline{B}) \cdot P_{\overline{B}}(A)$$

2- از روی دیاگرام درختی زیر، داریم:



$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

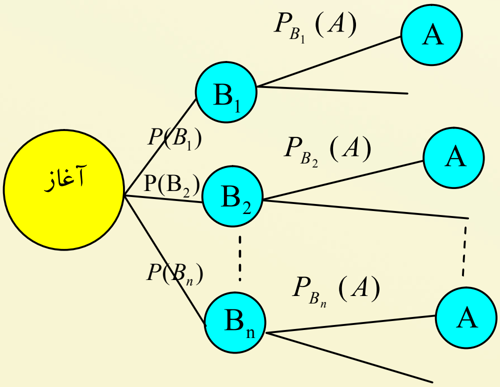
$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

و نظر به نتیجهٔ (1)، به دست می‌آید:

$$P_A(B) = \frac{P_B(A) \cdot P(B)}{P(B) \cdot P_B(A) + P(B) \cdot P_B(A)}$$

3- هر گاه این حالت را برای تقسیمات اختیاری B_1, B_2 ، ... , B_n حوادث اتفاقی فضای نمونه Ω عمومیت ببخشیم در این صورت با در نظر داشت دیاگرام درختی بالا، می‌توان فورمول زیر را به دست آورد:

$$P_A(B_i) = \frac{P_{B_i}(A) \cdot P(B_i)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + \ldots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)} = \frac{P(A \cap B_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B_k) \cdot P_{B_k}(A)} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$



مثال: یک شاگرد در ٪50 روزهای رفتن به مکتب از سرویس استفاده می‌کند که با احتمال ٪70 در وقت معین به مکتب می‌رسد. به طور اوسط، او با احتمال ٪60 در وقت معین در مکتب حاضر می‌شود. هرگاه حوادث:

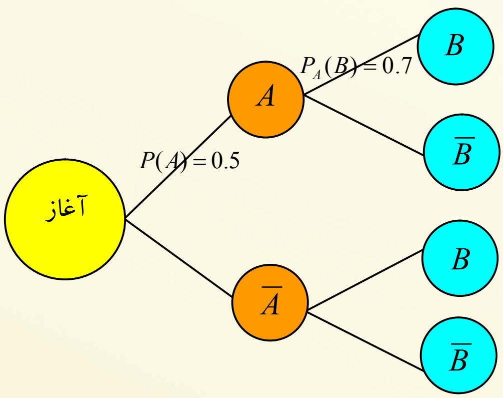
A: به وسیلهٔ سرویس رفتن   B: در وقت معین رسیدن

باشد، در این صورت احتمال مشروط A نظر به B یعنی $P_B(A)$ مطلوب است؟

حل: برای دریافت احتمال مذکور با در نظر داشت دیاگرام درختی زیر و نظر به فورمول، داریم:

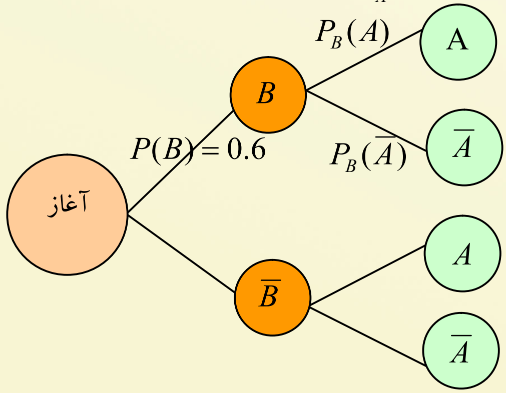
$$P_B(A) = \frac{P(A)\cdot P_A(B)}{P(B)} = \frac{0.5\cdot 0.7}{0.6} = 0.5833 = 58.3\bar{3}\%$$

بنابرین احتمال رسیدن بـه وسـیلهٔ سـرویس مشروط بر این که به وقت معینه در مکتب باشد $58.3\bar{3}\%$ می‌باشد.

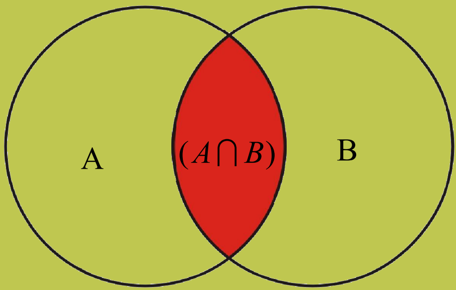


تمرین

با استفاده از دیاگرام زیر برای احتمال مشروط وقت معین رسیدن بـه مکتـب، بـه شـرط ایـن کـه بـه وسیلهٔ سرویس صورت گرفته باشد؛ یعنی $P_A(B)$ و احتمال حادثهٔ اتفاقی به وقت معینـه رسـیدن بـه مکتب به شرط آن که به وسیله سرویس نیامده باشد یعنی $P_{\bar{A}}(B)$ مطلوب است.



اصل حاصل ضرب



احتمال حادثهٔ اتفاقی A مشروط به B و احتمال حادثهٔ اتفاقی A و B با هم چه رابطه‌یی دارند؟

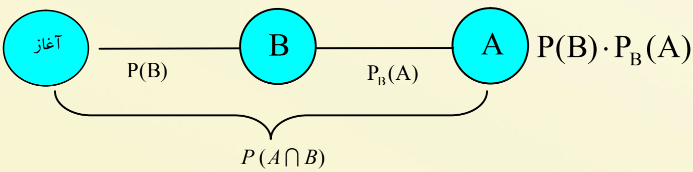
هرگاه A و B دو حادثهٔ اتفاقی یک فضای نمونهٔ S باشند:

- احتمال حادثهٔ اتفاقی A مشروط به B را بنویسید؟
- احتمال حادثهٔ اتفاقی $(A\bigcap B)$ را با استفاده از حوادث اتفاقی A و B و یا A مشروط به B بنویسید.
- با استفاده از گراف‌های درختی، قیمت حاصل ضرب $P(B)\cdot P_B(A)$ را به دست آورید.
- نتایج محاسبهٔ دو بند بالای فعالیت را با هم مقایسه کنید؟
- آیا می‌توانیم موضوع را بر بیشتر از دو حادثهٔ اتفاقی تعمیم دهیم؟

از انجام فعالیت فوق نتیجه زیر به دست می‌آید:

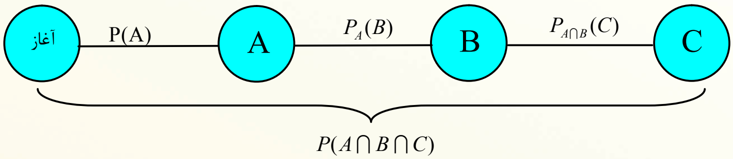
در یک فضای نمونهٔ S برای دو حادثهٔ اتفاقی A و B با در نظرداشت تعریف احتمال مشروط، داریم: $P(A\bigcap B) = P(B)\cdot P_B(A)$

این مسأله را از گراف درختی نیز می‌توان به دست آورد:



$$\Rightarrow P(A\bigcap B) = P(B)\cdot P_B(A)$$

این مطلب را برای سه حادثهٔ اتفاقی A، B و C به شکل زیر توسعه می‌دهیم:



$$\Rightarrow P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{A\cap B}(C)$$

قاعدهٔ فوق را به نام اصل حاصل ضرب یاد نموده و می‌توان آن را برای تعداد اختیاری حوادث اتفاقی نیز به دست آورد.

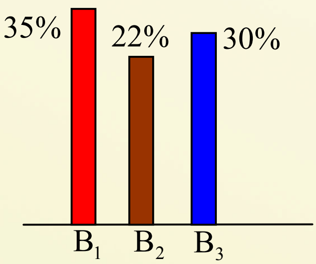
مثال: در انتخابات پارلمانی سه ولایت B_1, B_2, B_3 که برای هر کدام آن فیصدی مشترکین انتخابات و حزب جمهوری داده شده است؛ با کدام احتمال مشترکین انتخابات و یا رای دهنده‌گان حزب جمهوری را انتخاب کرده اند؟

حل: حوادث اتفاقی زیر را تعریف و نامگذاری می‌نماییم:

V: رای دهنده‌گانی که حزب جمهوری را انتخاب کرده اند.

B_i: رای دهنده‌گان ولایت B_i – (i– ام)، i=1, 2, 3, …، ارقام در زیر داده شده است.

ولایت	رای دهنده‌گان به فیصدی	رای دهنده‌گان به حزب جمهوری
B_1	33.2٪	35
B_2	46.5٪	22
B_3	20.3٪	30



حوادث اتفاقی $B_i\ (i=1,2,3)$ در حقیقت یک تقسیم فضای نمونهٔ S را تشکیل داده که برای آنها صورت می‌پذیرد.

1– B_iها با هم دو به دو مستقل اند و عنصر مشترک ندارند.

2– برای فضای نمونهٔ S، $S=B_1\cup B_2\cup B_3=\bigcup_{i=1}^{3}B_i$ بوده، سپس

حادثهٔ $V=\bigcup_{i=1}^{3}(B_i\cap V)$

از این رابطه می‌توان برای احتمال طرفین بنویسیم:

$$P(V)=P\left(\bigcup_{i=1}^{3}(B_i\cap V)\right)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i\cap V)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i).P_{B_i}(V)$$
$$=P(B_1)\cdot P_{B_1}(V)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(V)+P(B_3)\cdot P_{B_3}(V)$$
$$=0.332\cdot 0.35+0.465\cdot 0.22+0.203\cdot 0.3$$
$$=0.1162+0.1023+0.0609$$
$$=0.2794=27.94\%$$

تعریف: حالت عمومی حوادث $B_1, B_2, ..., B_n$ طوری که $P(B_i)\neq 0$ باشد $i=1,2,\ ...\ ,n$ یک حادثهٔ اتفاقی فضای نمونهٔ S می‌باشد. که احتمال کامل را تشکیل می‌دهد و برای حادثهٔ اتفاقی اختیاری A داریم: $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)$

از تعریف احتمال مشروط، نظر به قضیهٔ اصل حاصل ضرب و با در نظرداشت مسألهٔ احتمال، فورمول زیر که به نام فورمول بائیز (Bayes) یاد می‌گردد، به آسانی به دست می‌آید طوری که $i=1,...,n$ یک حادثهٔ از فضای نمونهٔ s برای $P(B_i)\neq 0$، $i=1,...,n$ حادثهٔ اتفاقی A با احتمال $P(A)\neq 0$ داریم:

فورمول Bayes:
$$P_A(B_i)=\frac{P(A\cap B_i)}{P(A)}=\frac{P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}{\sum_{k=1}^{n}P(B_k)\cdot P_{B_k}(A)}$$

فورمول بائیز کاربرد فراوان دارد، به طور مثال برای $n=2$ هرگاه $B_1=B$ و $B_2=\overline{B}$ در نظر گرفته شود، در حقیقت B_1 و B_2 حوادثی از فضای نمونهٔ S هستند و داریم:

$$P_A(B)=\frac{P(B)\cdot P_B(A)}{P(B)\cdot P_B(A)+P(\overline{B})\cdot P_{\overline{B}}(A)}$$

فورمول بالا، فورمول بائیز برای $n=2$ می‌باشد.

مثال: در یک فابریکه سه ماشین A، B و C به ترتیب با سهم 30٪، 30 ٪ و 40٪ گروپ‌های برق تولید می‌کنند. خرابی تولید گروپ‌ها در ماشین‌ها به ترتیب 4٪، 2 ٪ و 5٪ می‌باشد هرگاه گروپ‌های تولید شده به صورت مختلط فروخته شوند مطلوب است:

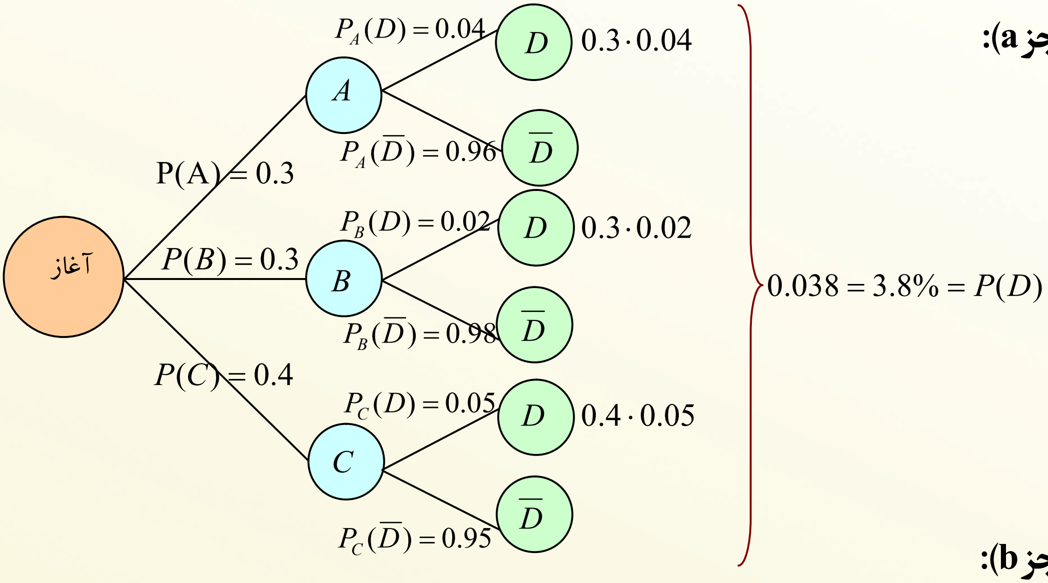
a) احتمال آن که یک گروپ خریداری شده خراب باشد.

b) به کدام احتمال یک گروپ خراب فروخته شده مربوط ماشین C است؟

c) یک گروپ دست ناخورده به کدام احتمال از ماشین B خواهد بود؟

حل:

جزa):



جزb):

$$P_D(C) = \frac{P(D \cap C)}{P(D)} = \frac{P(C) \cdot P_C(D)}{P(D)} = \frac{p(c) \cdot p_c(D)}{P(A) \cdot P_A(D) + P(B) \cdot P_B(D) + P(C) \cdot P_C(D)}$$

$$= \frac{0.4 \cdot 0.05}{0.3 \cdot 0.04 + 0.3 \cdot 0.02 + 0.4 \cdot 0.05} = \frac{0.02}{0.038} = 0.526 = 52.6\%$$

جــــــــزc):

$$P_{\overline{D}}(B) = \frac{P(\overline{D} \cap B)}{P(\overline{D})} = \frac{P(B) \cdot P_B(\overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{P(B) \cdot P_B(\overline{D})}{P(A) \cdot P_A(\overline{D}) + P(B) \cdot P_B(\overline{D}) + P(C) \cdot P_C(\overline{D})}$$

$$= \frac{0.3 \cdot 0.98}{0.3 \cdot 0.96 + 0.3 \cdot 0.98 + 0.4 \cdot 0.95}$$

$$= \frac{0.294}{0.288 + 0.294 + 0.38} = \frac{0.294}{0.962} = 0.3056 = 30.56\%$$

تمرین

در بین 1000 دانه رمل، فقط بر هر شش رخِ یکی از آن، خال شش شماره زده شده است. از بین آن‌ها یک‌دانه به صورت اتفاقی انتخاب و سه بار انداخته شده و هر سه بار 6 آمده است. احتمال آن را که این دانه به صورت درست شماره خورده باشد، دریافت کنید؟

استقلالیت حوادث اتفاقی

از احتمال مشروط می‌دانیم کـه در دو حادثـهٔ اتفـاقی A و B، ظهور حادثهٔ B بر حادثهٔ A تأثیر می‌گذارد. بدین سبب لازم است تا هنگام محاسبهٔ احتمال حادثهٔ A حادثهٔ B را در نظر بگیریم.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

در حالتی که وقوع حادثهٔ اتفاقی A بر حادثهٔ اتفاقی B تأثیر نداشته باشد و بر عکس آن؛ حاصل ضرب احتمال A و B با احتمال حادثهٔ $A \cap B$ چه رابطه‌یی دارد؟

تعریف: دو حادثهٔ اتفاقی A و B که بر همدیگر تأثیر گذار نباشند، به نام حـوادث اتفـاقی مـستقل یاد می‌گردند. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

فعالیت

فضای نمونهٔ S و دو حادثهٔ مستقل از همدیگر A و B را که شامل فضای نمونهٔ S می‌باشد، در نظر بگیرید.

- با توجه به فورمول احتمال مـشروط در صـورتی کـه A و B دو حادثهٔ مـستقل از هـم باشـند، احتمالات $P_B(A)$ و $P(A)$ چه فرقی با هم دارند؟
- احتمال حادثهٔ اتفاقی $P(A \cap B)$ مساوی به چیست؟
- از فورمول احتمـال حـوادث $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ در صـورتی کـه A و B نقطهٔ مشترک نداشته باشند، چه نتیجه‌یی می‌گیرید؟

از انجام فعالیت فوق نتیجهٔ زیر به دست می‌آید:

1: دو حادثهٔ اتفاقی A و B از هم مستقل گفته می‌شوند، در صورتی که:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ (حاصل ضرب)

2: اگر A و B دارای نقاط مشترک نباشند:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow (A \cap B) = 0$$

$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (اصل حاصل جمع)

مثال 1: هرگاه رنگ چشم و ذکاوت شاگردان یـک مکتـب را کـه یکـی بـالای دیگـری بـی‌تـأثیر فرض گردیده باشد، با درنظرداشت حوادث زیر برای انتخاب یک شاگرد به صورت اتفاقی:

H: فرد انتخاب شده یک شاگرد ذکی باشد.

B: شاگرد انتخاب شده دارای چشمان سیاه باشد.

دریافت کنید احتمال آنکه شاگرد انتخاب شده به صورت اتفاقی ذکی و چشمان سیاه داشته باشد.

حل: احتمال این که شاگرد انتخاب شده ذکی و چشمان سیاه داشته باشد:

چون: $P_B(H)=P(H)$ و علاوتاً $P_B(H)=\dfrac{P(B\cap H)}{P(B)}$ بنابر این $P(B\cap H)=P(H)\cdot P(B)$

حالت عمومی: n حادثهٔ اتفاقی $A_1\ ,\ A_2\ ,\ A_n.....\ ,\ (n\geq 2)$ به گونهٔ احتمالی از هم مستقل نامیده می‌شوند هرگاه برای هر ترکیب دو یا چندین حادثهٔ آنها قاعدهٔ حاصل ضرب صدق کند؛ در غیر آن حوادث به گونهٔ احتمالی با هم وابسته نامیده می‌شوند.

نتیجه

1: دقت باید کرد با استفاده از قاعدهٔ حاصل ضرب در جدول متقاطع زیر نیز می‌توان نتایج احتمالات حوادث اتفاقی $A\cap B$, $A\cap\overline{B}$, $\overline{B}\cap\overline{A}$ و $\overline{B}\cap A$ را برای حوادث A و B که دارای احتمالات a و b باشند، به ساده گی به دست آوریم. از استقلالیت A و B می‌دانیم که حوادث A و $\overline{B}$ ، $\overline{A}$ و B و بالاخره $\overline{A}$ و $\overline{B}$ نیز از هم مستقل اند.

بنابرین داریم:

	B	$\overline{B}$	
A	$P(A\cap B)=a\cdot b$	$P(A\cap\overline{B})=a(1-b)$	a
$\overline{A}$	$P(\overline{A}\cap B)=b(1-a)$	$P(\overline{A}\cap\overline{B})=(1-a)(1-b)$	$1-a$
	b	$1-b$	1

2: برای سه حادثهٔ اتفاقی A ، B و C که به گونهٔ احتمالی از هم مستقل می‌باشند، داریم:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$
$$P(A\cap C)=P(A)\cdot P(C)$$
$$P(B\cap C)=P(B)\cdot P(C)$$
$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$$

مثال2: در داخل یک خریطه دو گلولهٔ سفید و دو گلولهٔ سیاه قرار دارند، دو گلوله یکی پی دیگر از آن می‌برداریم طوری که:

a- پس از گرفتن اولین گلوله، آن را دوباره در داخل خریطه می گذاریم.

b- گلولهٔ اول را پس از برداشتن، دوباره در خریطه نمی گذاریم.

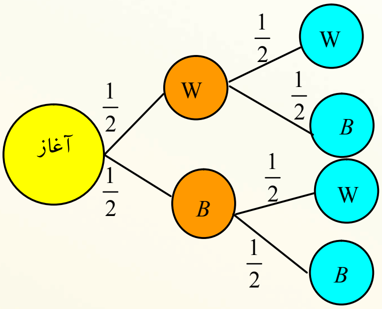
حوادث:

A: اولین بار گلوله سفید براید. B: دومین بار گلوله سفید باشد. C: از هم مستقل یا وابسته اند.

حل a): چون $P(A)=\dfrac{1}{2}$, $P(B)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$ است؛ بنابرین:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

از اینجا گفته می‌توانیم که A و B با هم مستقل اند.

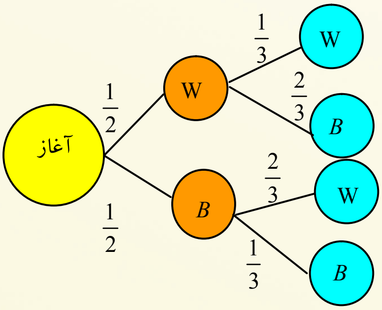


a) چون $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$ است

$$\Rightarrow P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)$$

$$\frac{1}{6}\neq\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{6}\neq\frac{1}{4}$$



C: بنابرین حوادث A و B با هم وابسته اند.

مثال3: خانه‌های جدول متقاطع زیر را تکمیل کنید:

	B	$\overline{B}$	
A	0.12	$P(A\cap\overline{B})=?$	?
$\overline{A}$	$P(\overline{A}\cap B)=?$	$P(\overline{A}\cap\overline{B})=?$	?
	?	0.6	

حل: چون $P(\overline{B})=0.6$ است، بنابرین داریم:

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-0.6=0.4$$

$$P(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.12}{0.4}=0.3$$

$$\Rightarrow P(\overline{A})=1-P(A)=1-0.3=0.7$$

و برای تقاطع حوادث داریم:

$$P(A\cap\overline{B})=P(A)\cdot P(\overline{B})=0.3\cdot 0.6=0.18$$

$$P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})\cdot P(B)=0.7\cdot 0.4=0.28$$

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=0.7\cdot 0.6=0.42$$

بدین ترتیب، با وضع قیمت‌ها در جدول، حل مسأله تکمیل می گردد.

تمرین

از یک ستی که عناصر آن $3, 2$ ، 5 و 30 است، احتمال برگزیدن یک رقم از این ست 0.25 می‌باشد، به‌صورت اتفاقی یک رقم را از این ست انتخاب می‌کنیم؛ اگر A_k حادثهٔ اتفاقی رقم برگزیده شده قابل تقسیم بر k باشد، آیا حوادث اتفاقی A_3, A_2 و A_5 دو به دو مستقل اند یا خیر؟

نکات مهم فصل هشتم

فضای نمونهٔ گسسته

فضای نمونه‌یی که عناصر آن قابل شمارش و تشخیص باشند، به نام فضای نمونهٔ گسسته یاد می‌گردد، مانند فضای نمونهٔ پرتاب یک سکه و یا یک دانه رمل.

فضای نمونهٔ پیوسته

فضای نمونه‌یی که عناصر آن قابل شمارش نباشند، به نام فضای نمونهٔ پیوسته یا متمادی یاد می‌گردد. و یا فضای نمونه‌یی که به صورت یک انتروال روی محور اعداد حقیقی و یا اشکال و احجام هندسی در مستوی و فضا می‌توانند ظهور نمایند.

حوادث هم‌چانس

حوادث اولیهٔ یک فضای نمونه که در انجام یک تجربه با احتمال برابر به وقوع می‌پیوندند، به نام حوادث هم‌چانس یاد می‌گردند. مجموع احتمالات حوادث اتفاقی هم‌چانس یک تجربهٔ مساوی با یک می‌باشد.

احتمال فضاهای پیوسته

ست طول قطعه خط‌ها، سطوح و احجام، حالت مساعد و یا مطلوب برای حادثهٔ اتفاقی مورد نظر بر مقدار خطوط، سطح و احجام با فضای پیوسته یک تجربه، عبارت از احتمال فضای پیوسته برای حادثهٔ اتفاقی مورد نظر می‌باشد.

احتمال مشروط

هرگاه A و B دو حادثهٔ اتفاقی یک فضای نمونهٔ S باشند، طوری که $P(B) \neq 0$ بوده باشد، در این صورت $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ احتمال مشروط حادثهٔ اتفاقی A است مشروط به آن که حادثهٔ B به وقوع پیوسته باشد.

حوادث از هم مستقل

دو حادثهٔ اتفاقی A و B از هم مستقل نامیده می‌شوند:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ (اصل حاصل ضرب)

تمرینات عمومی فصل هشتم

1- کدام یک از فضاهای نمونهٔ زیر پیوسته و کدام یک آنها گسسته است؟

الف: تجربهٔ انداختن یک دانه رمل   ب: تجربهٔ انداختن یک سکه

ج: اصابت تیر به یک دایره   د: تجربهٔ ازدیاد طول یک میلهٔ فلزی نظر به حرارت

2- از طول یک چارتراش به طول L به صورت اتفاقی یک برش عرضی انجام می‌دهیم تا دو قسمت گردد، چقدر احتمال دارد که قسمت بریده شدهٔ طرف چپ کوچک‌تر از 3 برابر قسمت راست باشد.

3- کارگر یک شرکت خصوصی هر روز بین ساعات 8 تا 8:50 در ایستگاه نزدیک منزلش که سرویس‌های مامورین آن شرکت به اوقات 8:15 ، 8:30 و 8:45 به ایستگاه می‌رسند منتظر است. چقدر احتمال دارد که شخص مذکور کم تر از 5 دقیقه منتظر سرویس باشد؟

4- به صورت تصادفی از انتروال بستهٔ $[0,3]$ دو عدد را انتخاب می‌نماییم. دریافت کنید احتمال آن که مجموع اعداد کمتر از 5 و بزرگ‌تر از 2 باشد.

5- یک نقطه به صورت تصادفی در داخل مخروطی که شعاع قاعدهٔ آن $R=\sqrt{3}$ باشد، انتخاب می‌کنیم. دریافت کنید احتمال آن که نقطهٔ داخل کرهٔ محاط در این مخروط قرار گیرد؟

6- خراب بودن یک قلم خودکار می‌تواند دو دلیل داشته باشد:

- خرابی میخانیکیت
- خرابی نیچهٔ خودکار

هرگاه احتمال آن که یک قلم خودکار خراب باشد 0.088 و احتمال علت خرابی دلیل شمارهٔ 1 مساوی به 0.05 باشد و برای دومین نقص قیمت احتمال مساوی به 0.002 باشد، مطالعه کنید آیا دو دلیل بالا با هم حوادث مستقل و یا غیر مستقل می‌باشند؟

7- خبیر می‌خواهد قفل خانه را باکلیدی که با چهار کلید همسان در جیبش قرار دارند. باز کند با کدام احتمال بعد از امتحان سوم کلیدی که از جیبش می‌گیرد کلید قفل خواهد بود در صورتی که:

a) کلیدهای امتحان شده را تحت شرطی که کلید اصلی نباشد دوباره به همان جیب خود می‌گذارد.

b) کلیدهای امتحان شده را تحت شرطی که کلید اصلی نباشد در جیب دیگر خود می‌گذارد.